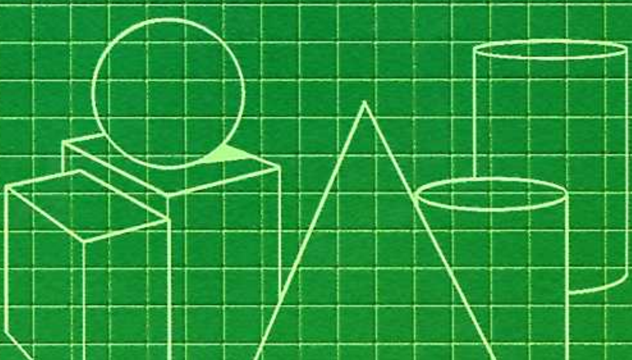
Большая перемена

Э.Н. Балаян

Геометрия

задачи на готовых чертежах для подготовки к ЕГЭ



10–11 классы

Большая перемена

Э.Н. Балаян

ГЕОМЕТРИЯ

Задачи на готовых чертежах для подготовки к ЕГЭ

10–11 классы

Ростов-на-Дону
Феникс
2013

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72
КТК 444
Б20

Балаян Э.Н.

Б20 Геометрия : задачи на готовых чертежах для подготовки к ЕГЭ: 10–11 классы / Э.Н. Балаян. — Ростов н/Д : Феникс, 2013. — 217 с. : ил. — (Большая перемена).

ISBN 978-5-222-19817-9

Предлагаемая вниманию старшеклассников книга содержит более 600 разноуровневых задач по всем основным темам геометрии (стереометрии) 10–11 классов на готовых чертежах, скомпонованных в 80 таблицах.

Эти задачи не только помогут учащимся углубить свои знания, проверить и закрепить практические навыки при систематическом изучении курса стереометрии, но и предоставляют хорошую возможность для самостоятельной эффективной подготовки к успешной сдаче ЕГЭ и вступительным экзаменам по математике.

Для удобства пользования книгой приводятся подробные решения к наиболее трудным задачам, а также краткие теоретические сведения, сопровождаемые определениями, рисунками и необходимыми справочными материалами. Ко всем задачам даны ответы.

Пособие является прекрасным дополнением к существующим учебникам геометрии, предназначено учителям, старшеклассникам общеобразовательных школ, лицеев, колледжей как для подготовки к урокам, так и сдаче ЕГЭ, а также репетиторам.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72

ISBN 978-5-222-19817-9

ПРЕДИСЛОВИЕ

Не секрет, что геометрические задачи вызывают у учащихся наибольшие затруднения. Достаточно сказать, что многие абитуриенты, как правило, обходят решения геометрических задач на ЕГЭ. Кроме того, выполнение наглядного чертежа также вызывает затруднения, не говоря уже о трудностях при нахождении идеи решения задачи.

Упражнения на готовых чертежах оказывают неоценимую помощь в усвоении и закреплении новых понятий и теорем. Эти задачи дают возможность в течение минимума времени усвоить и повторить значительно больший объем материала, тем самым наращивать темп работы на уроках. Кроме того, эти задачи способствуют активизации мыслительной деятельности учащихся, обучают их умению грамотно рассуждать, находить в них общее и делать различия, сопоставлять и противопоставлять, делать правильные выводы.

В книге на всех чертежах равные углы и равные отрезки отмечены одинаковыми знаками, прямые углы — квадратиками, что дает возможность учащимся значительно быстрее ориентироваться в условиях задачи.

Книга состоит из четырех разделов.

В первом разделе, для удобства пользования книгой, приводятся краткие теоретические сведения по курсу стереометрии, сопровождаемые необходимыми определениями, свойствами и справочными материалами. Изложение материала сжатое, в конспективной форме, но достаточное, чтобы им мог пользоваться не только старшеклассник, но и тот, кто незнаком с каким-либо разделом, и тот, кто окончил школу ранее и изрядно позабыл материал.

Во втором разделе приводятся базовые задачи, составленные в виде таблиц на нахождение углов и расстояний в пространстве, которые развивают геометрические представления, лежащие в основе решения любых задач по стереометрии.

Количество задач в самих таблицах — различно, среди них есть легкие, а более сложные расположены, как правило, в конце каждой таблицы, что дает возможность учителю вести дифференцированное обучение учащихся, а старшекласснику выбрать те или иные задачи в зависимости от уровня своей подготовленности.

В третьем разделе автором собраны разные задачи на многогранники и фигуры вращения. При выполнении задач происходит активная мыслительная деятельность учащихся, что, в свою очередь, приводит к эффективному непроизвольному запоминанию определений, свойств и признаков изучаемых фигур. В свою очередь, определения, свойства и признаки рассматриваемых фигур периодически повторяются в процессе решения разнообразных задач, что приводит в итоге к продуктивному запоминанию.

Немаловажное значение имеет и то (как показывает опыт), что учащиеся с бо́льшим удовольствием предпочитают решать эти задачи, чем отвечать на теоретические вопросы.

В заключительном, четвертом разделе приводятся подробные решения к наиболее трудным задачам, по одной из каждой таблицы.

Решение задач на готовых чертежах, несомненно, способствует повышению творческой активности учащихся, развитию логического мышления, является эффективным средством усвоения и закрепления теоретического материала.

Ко всем задачам в конце книги даны ответы, что дает возможность проверить правильность решенной задачи.

Отметим, что предлагаемые задачи не ставят целью заменить систему задач из существующих учебников по геометрии, а являются лишь (как надеется автор) прекрасным дополнением к учебникам. Они дают возможность учителю сэкономить значительную часть времени на изучение соответствующих тем и способствуют усилению практической направленности преподавания геометрии.

В дополнение к этой книге и для основательной подготовки к урокам и ЕГЭ, автор настоятельно рекомендует использовать вышедшие в издательстве «Феникс» книги автора «Геометрия. Задачи на готовых чертежах. 7–9 классы» — 4-е изд., 2012 и «Репетитор по геометрии для подготовки к ГИА и ЕГЭ. 7–11 классы», 2012.

Раздел I

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО КУРСУ СТЕРЕОМЕТРИИ X–XI КЛАССОВ

При решении задач стереометрии возрастают требования к качеству чертежа и его наглядности.

Освоение принципов и техники построения пространственного чертежа — необходимое условие для успешного решения задач.

Пространственные тела можно условно разделить на удобные для пространственного изображения и неудобные. К первой категории относятся многогранники: параллелепипед, треугольная призма, треугольная и четырехугольная пирамида. Все остальные будем считать неудобными для изображения.

В некоторых случаях при решении задач можно вообще обойтись одним плоским чертежом или несколькими (в случае необходимости) и не строить пространственное изображение.

Основным средством решения задач является аналитический метод.

Многогранники

К этому разделу отнесем два основных типа задач:

1) задачи на вычисление;

2) задачи на сечения.

К задачам на вычисление относятся те, где требуется найти линейные элементы правильных призм и пирамид, а именно: сторону основания, боковое ребро, апофему и т. д., далее угловые элементы: двугранные углы при основании, линейные углы при вершине; площади: боковой поверхности, полной поверхности, основания.

В основе второго типа задач — задач на построение лежит умение построить сечение данного многогранника плоскостью и определить вид этого сечения. В задачах этого типа сечение задается точкой и прямой, тремя точками, двумя точками и прямой, параллельной плоскостью сечения и т. д.

Многогранником называется тело, граница которого состоит из многоугольников.

Эти многоугольники называются **гранями**, их стороны — **ребрами**, а вершины — **вершинами многоугольника.**

Отрезки, соединяющие две вершины, не лежащие на одной грани, называются **диагоналями многогранника.**

Многогранники бывают **выпуклые и невыпуклые.**

Если многогранник целиком расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани, то он называется **выпуклым.**

Например, тетраэдр, октаэдр, параллелепипед — выпуклые многогранники.

Все грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками.

В выпуклом многограннике сумма всех плоских углов при каждой его вершине меньше 360°.

1. Призма

Призмой (рис. 1) называется многогранник, у которого две грани $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ (**основания призмы**) — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани (AA_1B_1B; BB_1C_1C и т. д.) — параллелограммы, плоскости которых параллельны одной прямой (AA_1, BB_1 и т. д.).

Параллелограммы AA_1B_1B, BB_1C_1C и т. д. называются **боковыми гранями**, а ребра AA_1, BB_1 и т. д. называются **боковыми.**

Перпендикуляр FF_1, опущенный из любой точки одного основания на плоскость другого, называется **высотой** призмы.

Если в основании призмы лежит треугольник, четырехугольник и т. д., то призма называется соответственно **треугольной, четырехугольной** и т. д.

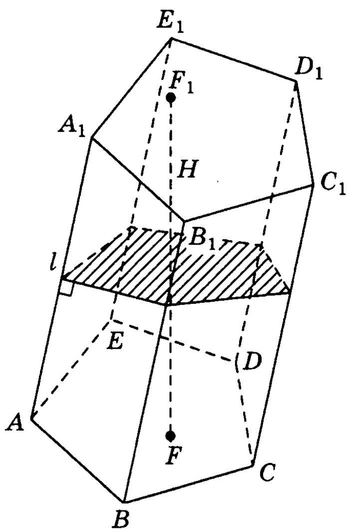


Рис. 1

Призма называется **прямой**, если боковые ребра перпендикулярны к основаниям, в противном случае призма называется **наклонной.**

Если в прямой призме основание — правильный многоугольник, то призма называется **правильной.**

У правильной призмы все боковые грани — **равные прямоугольники.**

Сечение, которое образовано плоскостью, перпендикулярной боковому ребру призмы, называется **перпендикулярным сечением** (см. рис. 1).

Произвольная призма

$$S_{\text{бок.}} = P_{\text{сеч.}} \cdot l; \quad V = S_{\text{осн.}} \cdot H; \quad V = S_{\text{сеч.}} \cdot l;$$
$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$$

Прямая призма

$S_{\text{бок.}} = P \cdot H; \quad S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}; \quad V = S_{\text{осн.}} \cdot H.$

Замечание. Для произвольного параллелепипеда справедливы те же формулы.

2. Параллелепипед

Параллелепипедом называется призма, основание которой — параллелограмм (рис. 2).

У параллелепипеда **6 граней** и все они параллелограммы.

Противоположные грани попарно равны и **параллельны**.

Параллелепипед имеет **4 диагонали**, которые пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

Любая грань параллелепипеда может быть принята за **основание**.

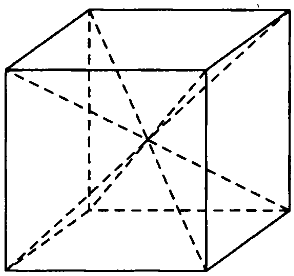


Рис. 2

Параллелепипед, у которого боковые грани — прямоугольники, называется **прямым**.

Прямой параллелепипед, у которого все грани — прямоугольники, называется **прямоугольным** (рис. 3).

Прямоугольный параллелепипед, у которого все грани квадраты, называется **кубом**.

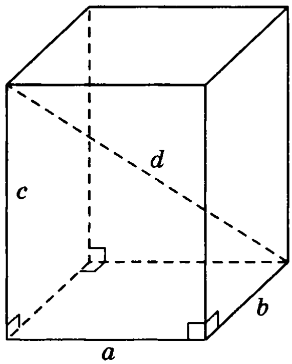


Рис. 3

Прямоугольный параллелепипед (рис. 3):

$S_{\text{бок.}} = P \cdot H = 2(a + b)c;$
$V = abc;$
$S_{\text{полн.}} = 2(ab + bc + ac);$
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$

Куб

Если a — ребро куба, то

$$V = a^3; \; d = a\sqrt{3}; \quad S_{\text{полн.}} = 6a^2.$$

3. Пирамида

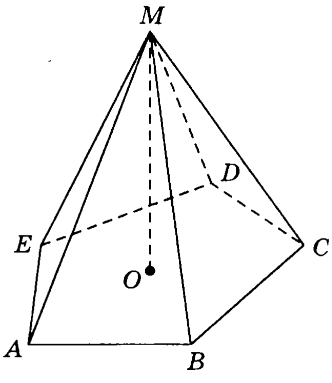


Рис. 4

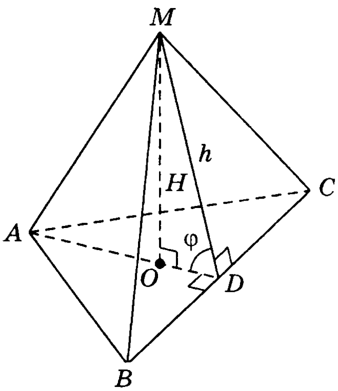


Рис. 5

Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань — **основание пирамиды** — произвольный многоугольник $ABCDE$ (рис. 4), а остальные **боковые грани** — треугольники с общей вершиной M.

Перпендикуляр MO, опущенный из вершины на основание, называется **высотой пирамиды.**

Если в основании пирамиды треугольник, четырехугольник и т. д., то пирамида называется треугольной, четырехугольной и т. д.

Треугольная пирамида называется **тетраэдром** (четырехгранником).

Если в основании пирамиды лежит правильный многоугольник, а высота проецируется в центр основания, то пирамида называется **правильной** (рис. 5).

В правильной пирамиде все боковые ребра равны, все боковые грани — равнобедренные треугольники.

Высота боковой грани MD называется **апофемой** правильной пирамиды.

Произвольная пирамида

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}}; \quad V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H.$$

Правильная пирамида (рис. 5)

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} P \cdot h; \quad S_{\text{бок.}} = \frac{S_{\text{осн.}}}{\cos\varphi};$$

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}}; \quad V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H.$$

Если в пирамиде провести сечение, параллельное основанию, то часть пирамиды, заключенная между секущей плоскостью и основанием, называется **усеченной пирамидой** (рис. 6).

Параллельные грани усеченной пирамиды (ABC и $A_1B_1C_1$) называются ее **основаниями**; расстояние между ними (OO_1) — **высотой.**

Усеченная пирамида называется **правильной**, если пирамида, из которой она получена, была правильной.

Все боковые грани правильной усеченной пирамиды — равные равнобедренные трапеции.

Высота боковой грани называется **апофемой** правильной усеченной пирамиды.

Произвольная усеченная пирамида

$$V = \frac{H}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}).$$

Правильная усеченная пирамида (рис. 6)

$S_{бок.} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$, где P_1, P_2 — периметры оснований.

$S_{полн.} = S_{бок.} + S_1 + S_2$, где S_1, S_2 — площади оснований.

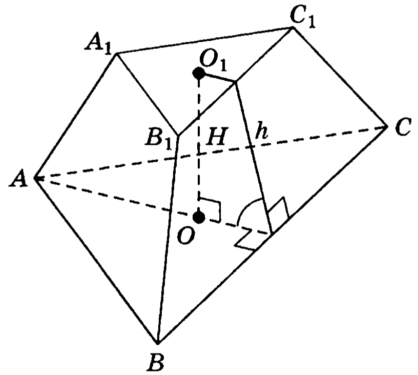


Рис. 6

4. Дополнительные соотношения между элементами призмы и пирамиды

1. Если в пирамиде $MA_1A_2...A_n$ все боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы (рис. 7), длины всех боковых ребер равны, то вершина M пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды (эта точка O является также точкой пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам основания пирамиды).

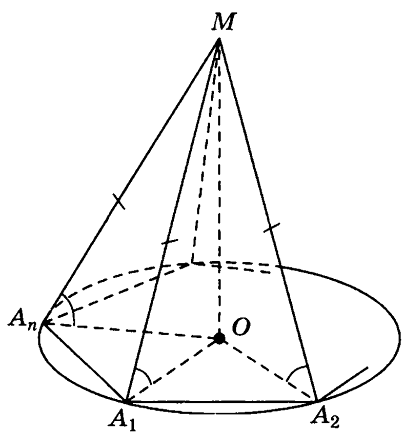


Рис. 7

2. Если в пирамиде $MA_1A_2...A_n$ все боковые грани образуют с основанием равные углы и длины всех апофем боковых граней равны, то вершина M пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды. Эта точка является также точкой пересечения биссектрис углов в основании пирамиды (рис. 8).

3. Если высота треугольной пирамиды $MABC$ проходит через точку пересечения высот ΔABC, лежащего в основании, то противоположные ребра пирамиды перпендикулярны, т. е. $AM \perp BC$, $MC \perp AB$ и $MB \perp AC$. Справедливо и обратное утверждение (рис. 9).

4. Если MO — высота пирамиды $MABC$ и $MA \perp BC$, то $(MAO) \perp BC$ (рис. 9).

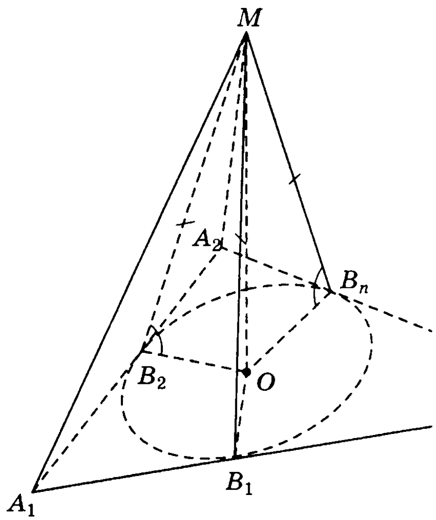


Рис. 8

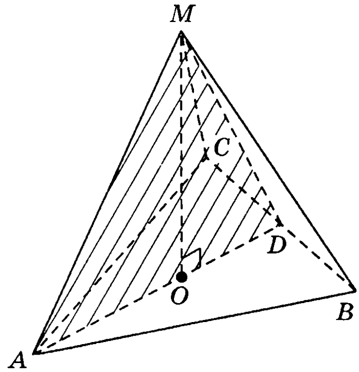


Рис. 9

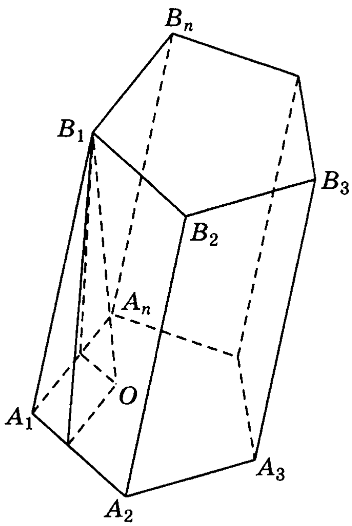


Рис. 10

5. Если в наклонной призме $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$ боковое ребро A_1B_1 составляет равные углы со сторонами основания, образующими вершину A_1, то точка O основания высоты B_1O лежит на биссектрисе $\angle A_1$ (рис. 10).

Круглые тела

Заметим, что круглые тела по сравнению с многогранниками относительно трудно поддаются изображению. Это замечание прежде всего относится к шару. По этой причине при решении стереометрических задач, как правило, сам шар (а тем более шары) стараются не изображать, так как многие задачи на круглые тела сводятся к задачам планиметрии.

При решении задач, связанных с цилиндром, используются такие понятия, как высота, образующая, радиус основания, осевое сечение, основание, поверхность (боковая и полная) и соответственно параметры: площадь осевого сечения, площадь боковой и полной поверхностей, площадь основания, объем цилиндра, радиус основания.

Что касается прямого кругового конуса (или просто конуса), то здесь добавляются угол при вершине осевого сечения и угол наклона образующей конуса к плоскости основания.

1. Цилиндр

Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами L и L_1, называется **цилиндром** (рис. 11).

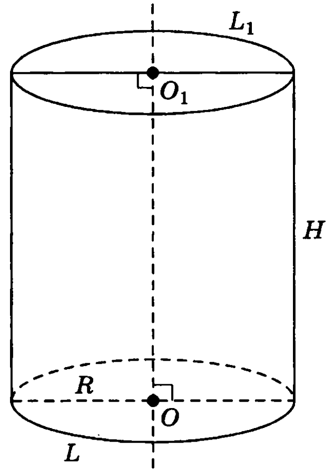


Рис. 11

Цилиндрическая поверхность называется **боковой поверхностью цилиндра**, а круги — **основаниями цилиндра.**

Образующие цилиндрической поверхности называются **образующими цилиндра**, а длина образующей — **высотой цилиндра.**

Прямая OO_1 называется **осью цилиндра.**

Всякое сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, представляет собой **прямоугольник**, у которого две стороны — образующие, а две другие — диаметры оснований цилиндра, а само сечение называется **осевым.**

Всякое сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной к оси, является **кругом.**

$$S_{\text{бок.}} = 2\pi RH; \quad S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}};$$
$$S_{\text{полн.}} = 2\pi R(R + H); \quad V = \pi R^2 H.$$

2. Конус

Конусом называется тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей L (рис. 12).

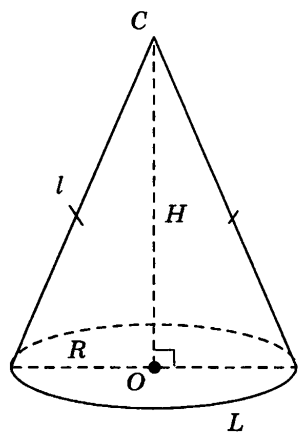


Рис. 12

Коническая поверхность называется **боковой поверхностью конуса**, а круг — **основанием конуса.**

Точка C — **вершина конуса**, а образующие конической поверхности — **образующие конуса.**

Прямая OC называется **осью конуса**, а отрезок OC называется **высотой конуса.**

Заметим, что конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг любого катета, при этом боковая поверхность конуса образуется вращением гипотенузы, а основание — вращением катета.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через ось конуса, называется **осевым.**

$$S_{\text{бок.}} = \pi Rl; \quad S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}};$$
$$S_{\text{полн.}} = \pi R(R + l); \quad V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

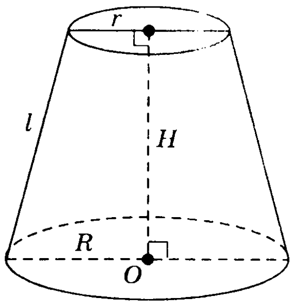


Рис. 13

Если конус пересечь плоскостью, перпендикулярной к его оси, то та часть конуса, которая заключена между секущей плоскостью и основанием, называется **усеченным конусом** (рис. 13).

Отрезок, соединяющий центры оснований, называется **высотой** усеченного конуса.

Часть конической поверхности, ограничивающая усеченный конус, называется его **боковой поверхностью**, а отрезки образующих конической поверхности, заключенные между основаниями, называются **образующими** усеченного конуса.

Усеченный конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной основаниям.

$$S_{\text{бок.}} = \pi l(R + r);\ S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_1 + S_2;\ S_1 = \pi R^2;$$

$$S_2 = \pi r^2;\ V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$

3. Шар

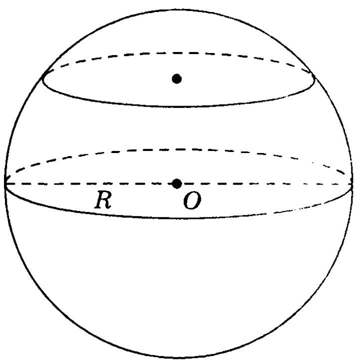


Рис. 14

Шаровой, или **сферической, поверхностью** (или просто **сферой**) называется геометрическое место точек пространства, равноудаленных от одной точки — **центра** шара (точка *O*, рис. 14).

Тело, ограниченное шаровой поверхностью, называется **шаром**.

Шар можно получить вращением полукруга (или круга) около его диаметра.

Сечение шара плоскостью, проходящей через центр *O*, представляет собой наибольший круг.

Если плоскость имеет со сферой только одну общую точку, то она называется **касательной плоскостью к сфере**, а их общая точка — **точкой касания** плоскости и сферы.

Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости. Верно и обратное.

Многогранник называется **описанным около сферы** (шара), если сфера касается всех его граней. При этом сфера называется **вписанной в многогранник**.

Многогранник называется **вписанным в сферу**, если все его вершины лежат на сфере. При этом сфера называется **описанной около многогранника**.

$$S_{\text{шара}} = 4\pi R^2 = \pi D^2; \quad V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

1. Шаровой сегмент (рис. 15).

Если S — площадь сферической поверхности сегмента, h — высота, V — объем, r — радиус основания, то

$$S = 2\pi Rh = \pi Dh = \pi(r^2 + h^2);$$

$$S_{\text{полн.}} = \pi(2Rh + r^2) = \pi(h^2 + 2r^2);$$

$$V = \pi h^2 (R - \frac{1}{3}h).$$

2. Шаровой сектор (рис. 15).

$$S = \pi R(2h + r);$$

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{6}\pi d^2 h.$$

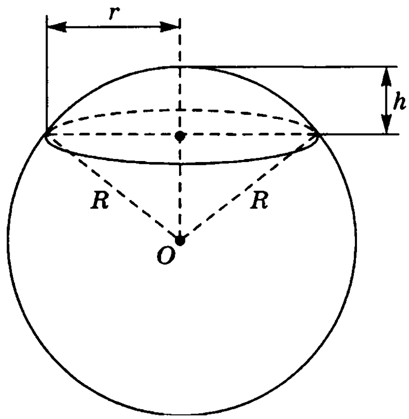


Рис. 15

3. Шаровой пояс (рис. 16).

Если h — высота шарового пояса, r_1 и r_2 — радиусы оснований, то

$$S_{\text{бок.}} = 2\pi Rh = \pi Dh;$$

$$S = \pi(2Rh + r_1^2 + r_2^2);$$

$$V = \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2).$$

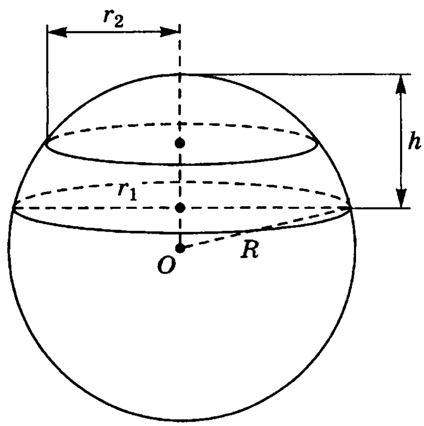


Рис. 16

Раздел II

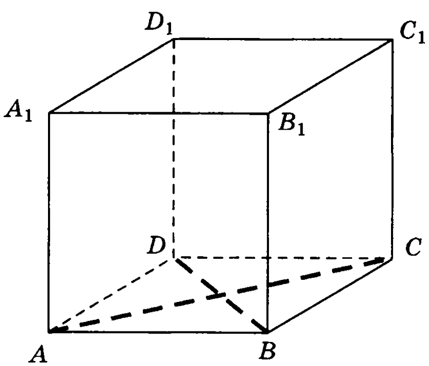
ЗАДАЧИ В ТАБЛИЦАХ

§ 1. Угол между двумя прямыми

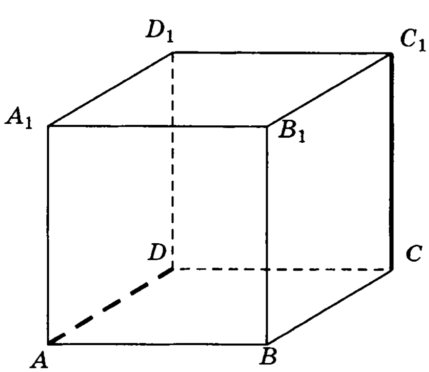
КУБ

Таблица 1

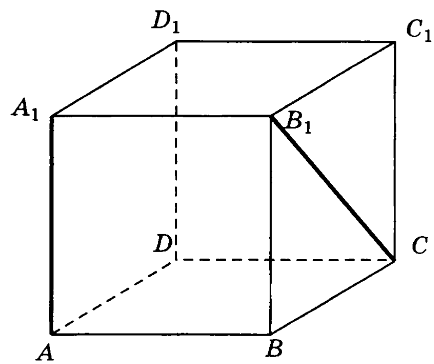
1 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AC и BD.



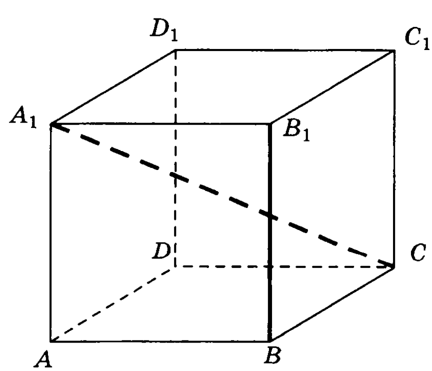
2 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми CC_1 и AD.



3 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AA_1 и B_1C.

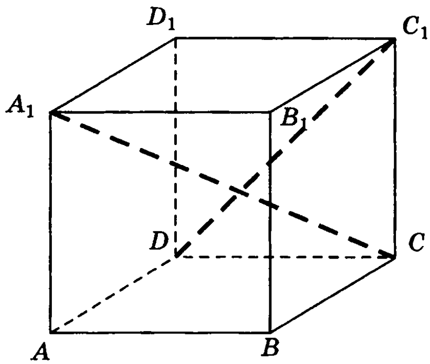


4 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми BB_1 и A_1C.

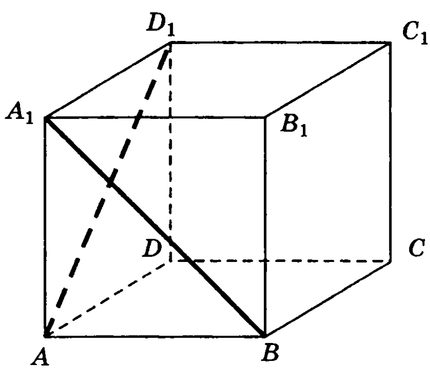


Продолжение табл. 1

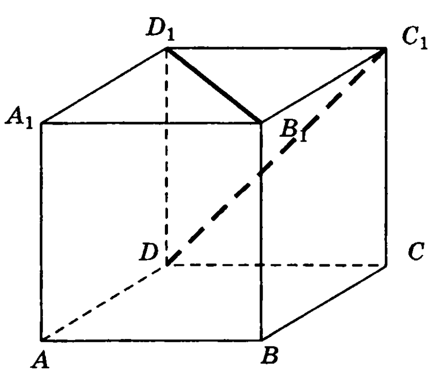
5 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми A_1C и DC_1.



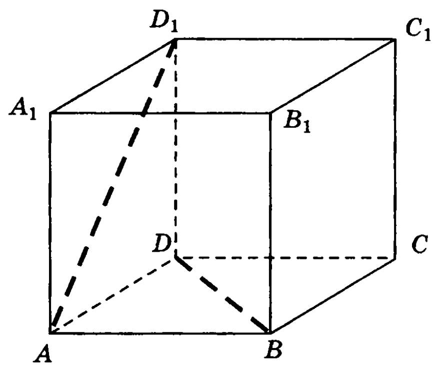
6 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и A_1B.



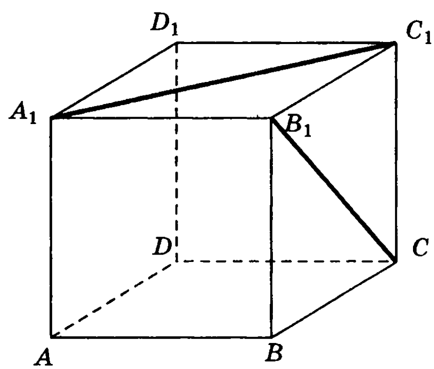
7 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми DC_1 и D_1B_1.



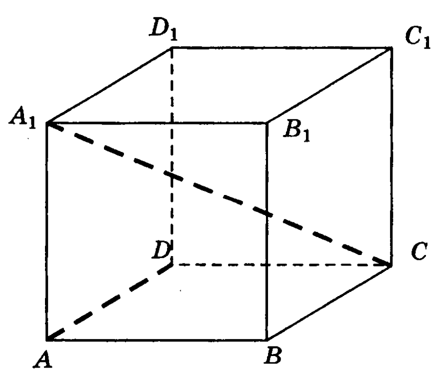
8 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и BD.



9 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми A_1C_1 и B_1C.

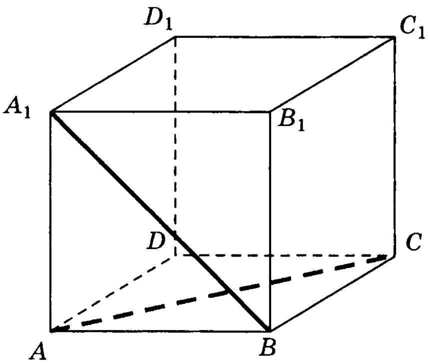


10 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми A_1C и AD.

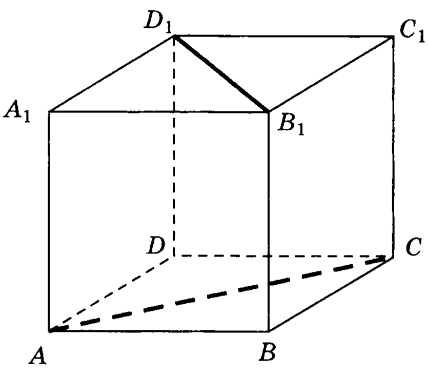


Продолжение табл. 1

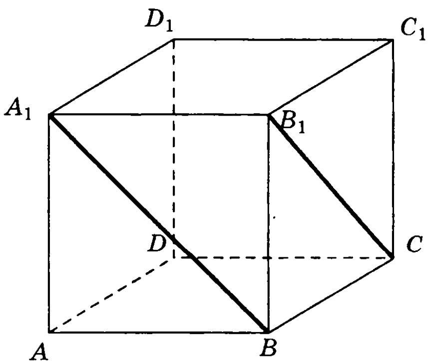
11 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми A_1B и AC.



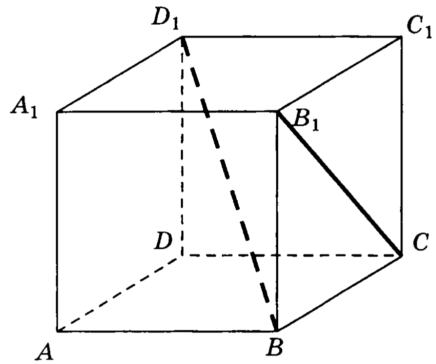
12 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AC и B_1D_1.



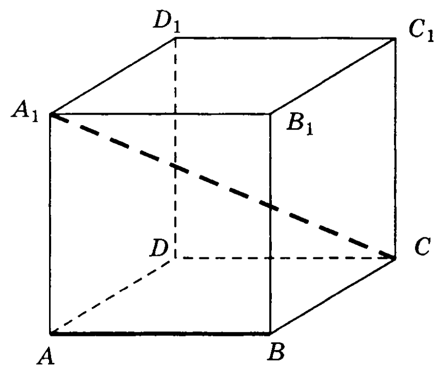
13 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми A_1B и CB_1.



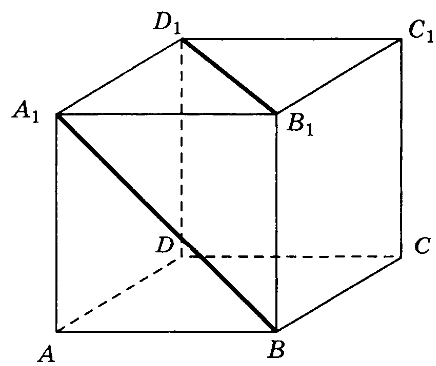
14 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми B_1C и BD_1.



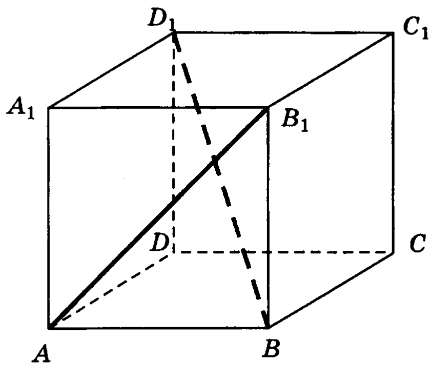
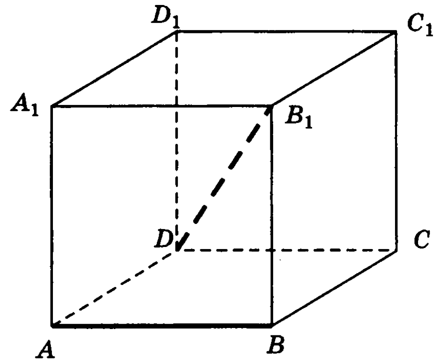
15 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AB и CA_1.



16 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми BA_1 и B_1D_1.



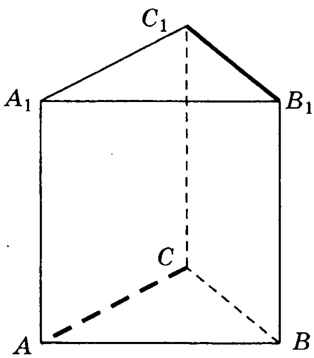
Окончание табл. 1

17 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AB_1 и BD_1. 	**18** В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AB и DB_1. 

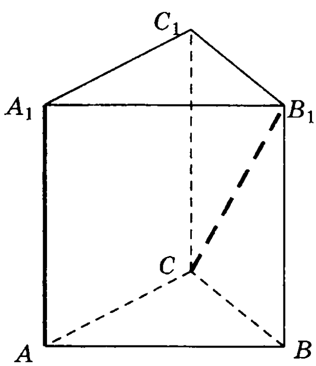
ПРАВИЛЬНАЯ ТРЕУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 2

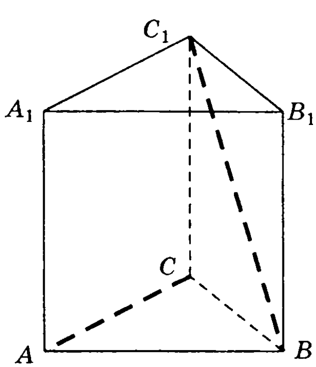
1 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AC и B_1C_1.



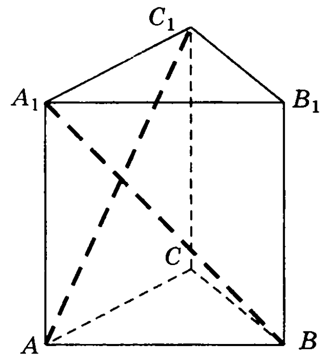
2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AA_1 и B_1C.



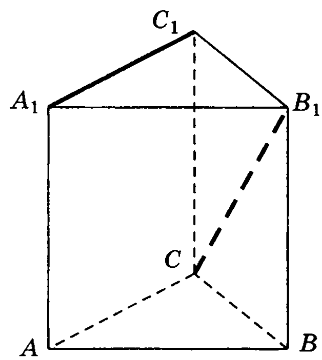
3 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AC и BC_1.



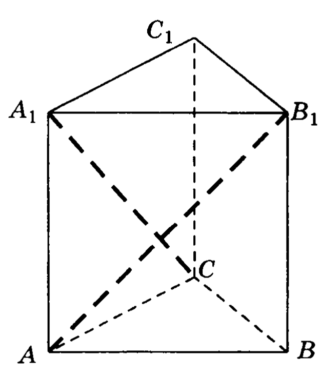
4 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AC_1 и A_1B.



5 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми A_1C_1 и B_1C.

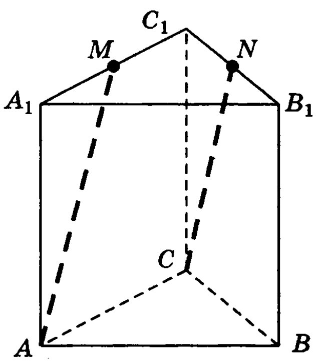


6 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и A_1C.

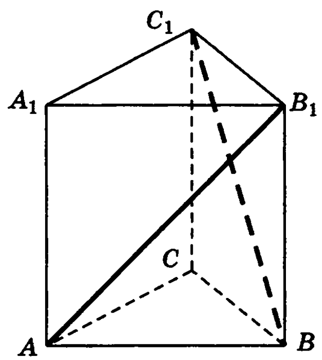


Окончание табл. 2

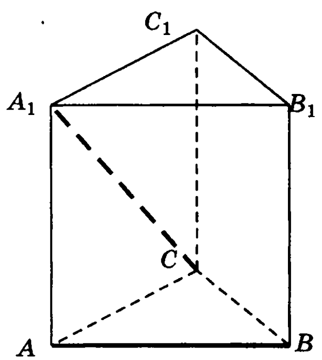
7 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AM и CN, где M и N — соответственно середины ребер A_1C_1 и B_1C_1.



9 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1.



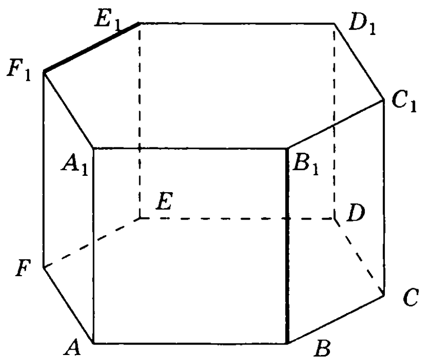
8 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB и CA_1.



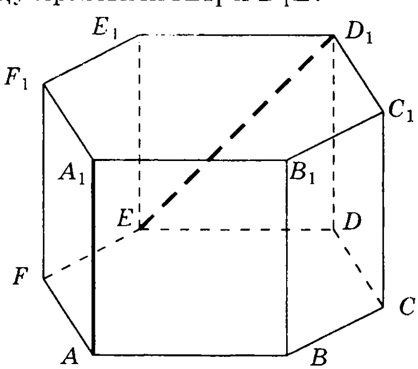
ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 3

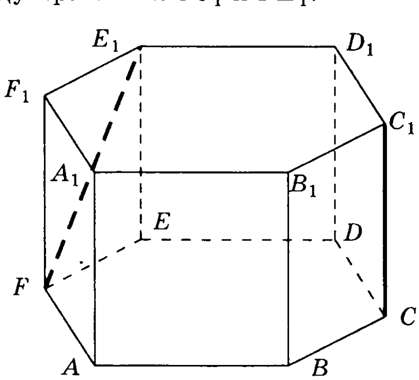
1 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми BB_1 и F_1E_1.



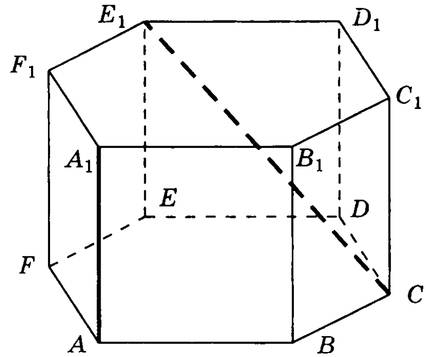
2 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AA_1 и D_1E.



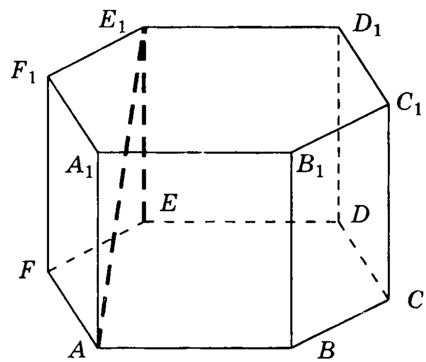
3 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми CC_1 и FE_1.



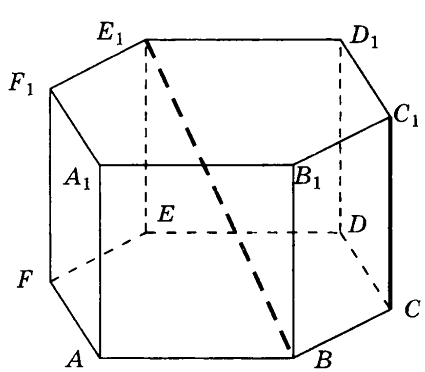
4 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AA_1 и E_1C.



5 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AE_1 и EE_1.

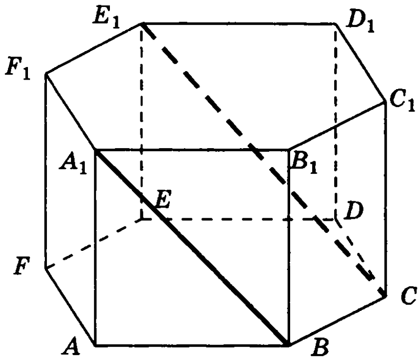


6 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми CC_1 и BE_1.

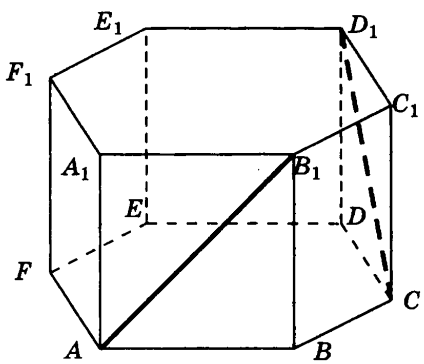


Продолжение табл. 3

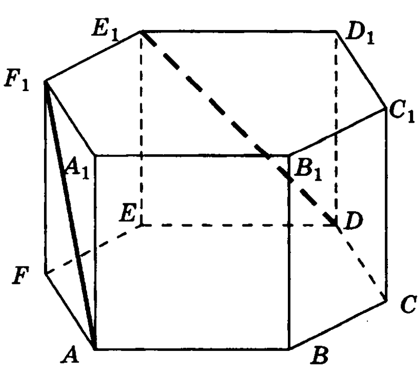
7 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми A_1B и E_1C.



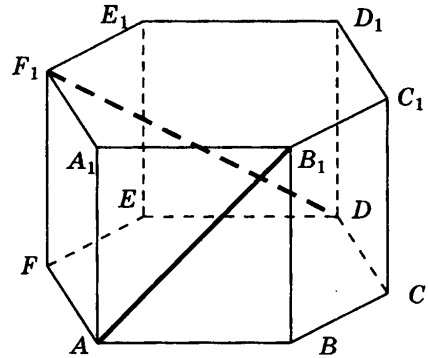
8 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и D_1C.



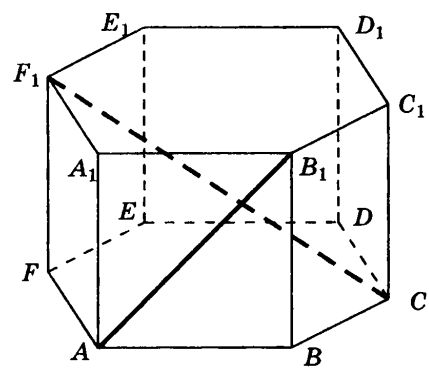
9 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AF_1 и DE_1.



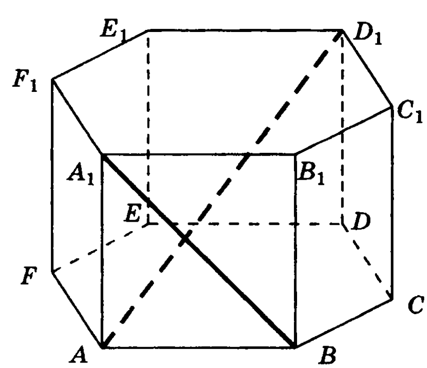
10 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и F_1D.



11 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми F_1C и AB_1.

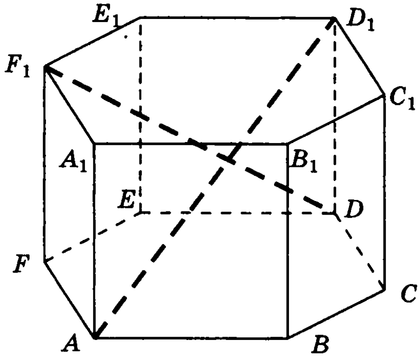


12 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми A_1B и AD_1.

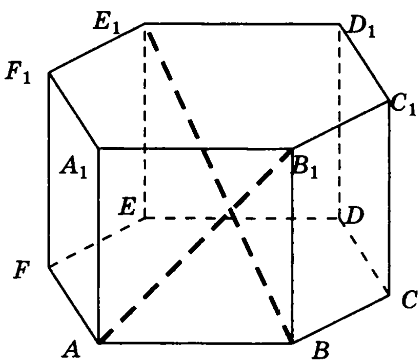


Продолжение табл. 3

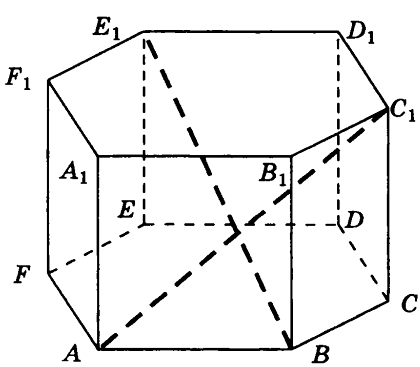
13 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AD_1 и F_1D.



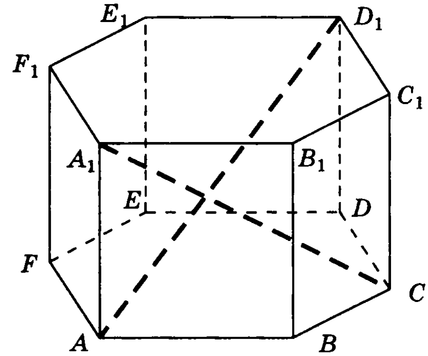
14 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми BE_1 и AB_1.



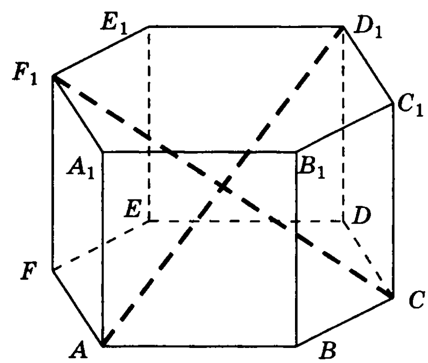
15 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AC_1 и BE_1.



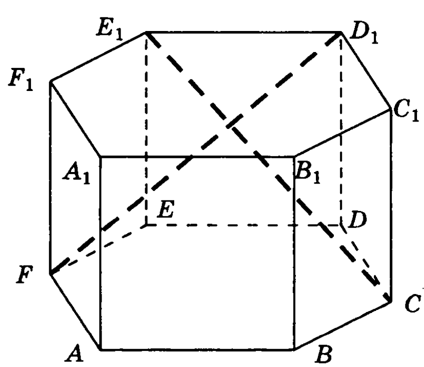
16 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми A_1C и AD_1.



17 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AD_1 и CF_1.

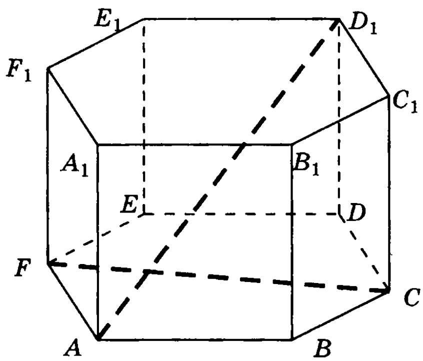


18 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми FD_1 и CE_1.

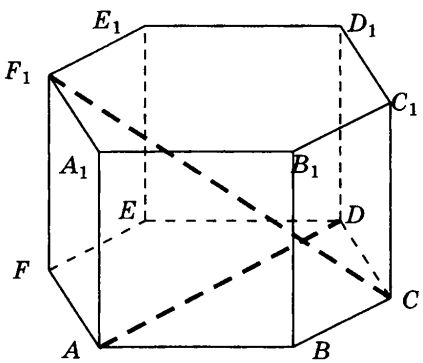


Продолжение табл. 3

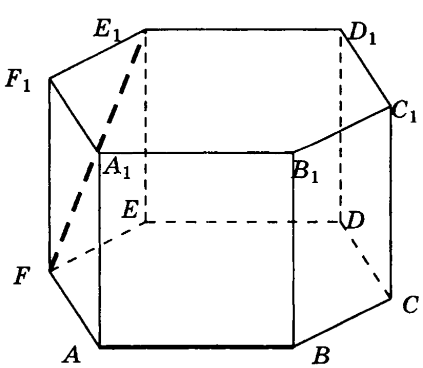
19 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми FC и AD_1.



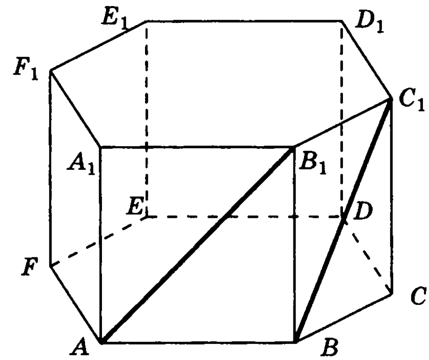
20 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AD и CF_1.



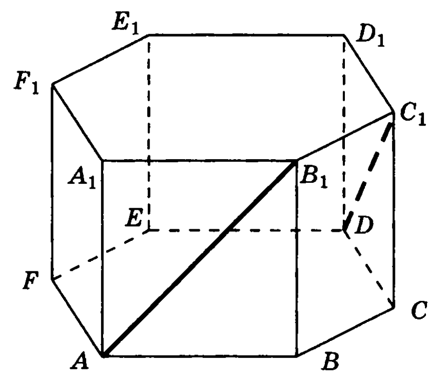
21 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB и FE_1.



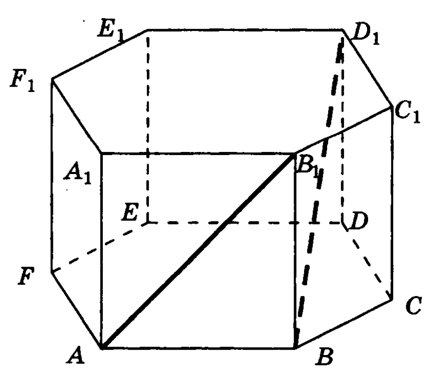
22 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1.



23 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и DC_1.

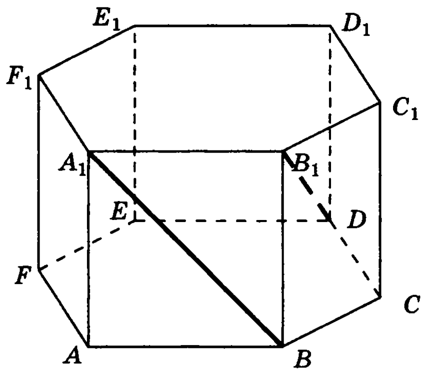


24 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и BD_1.



Окончание табл. 3

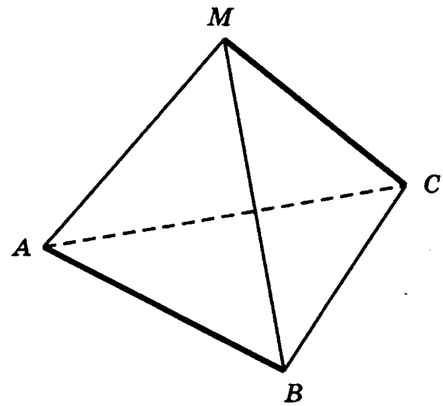
25 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми BA_1 и DB_1.



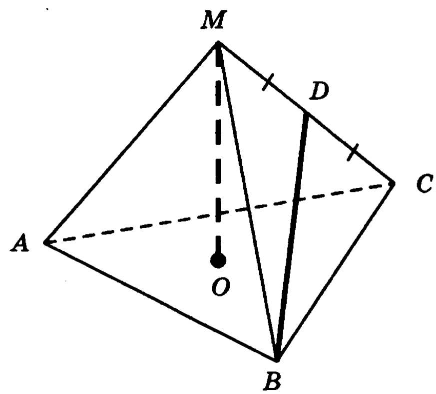
ПРАВИЛЬНЫЙ ТЕТРАЭДР

Таблица 4

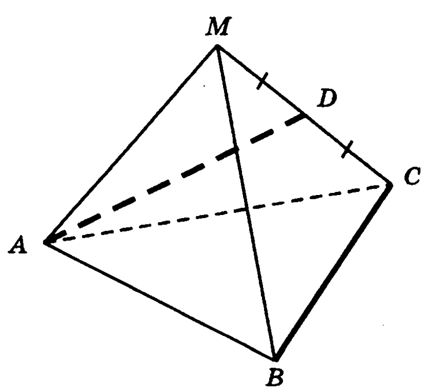
1 В правильном тетраэдре $MABC$ найдите угол между прямыми AB и CM.



2 В правильном тетраэдре $MABC$ найдите угол между высотой MO и медианой BD боковой грани MBC.



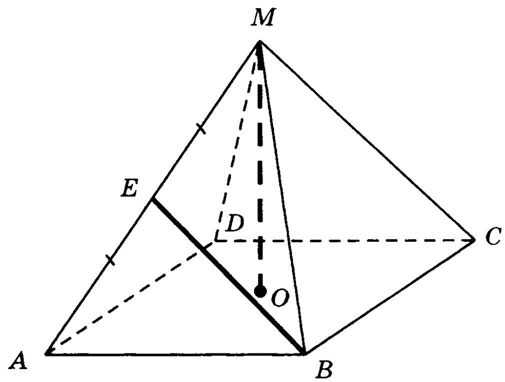
3 В правильном тетраэдре $MABC$ точка D — середина ребра CM. Найдите угол между прямыми BC и AD.



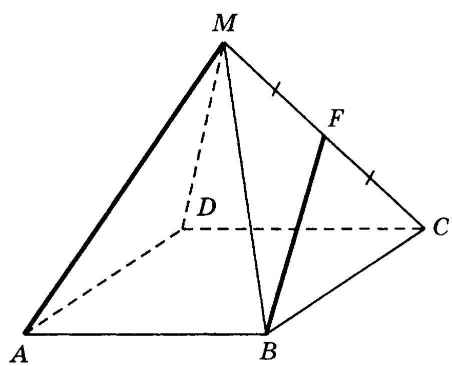
ПРАВИЛЬНАЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 5

1 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми MO и BE, где E — середина ребра AM.



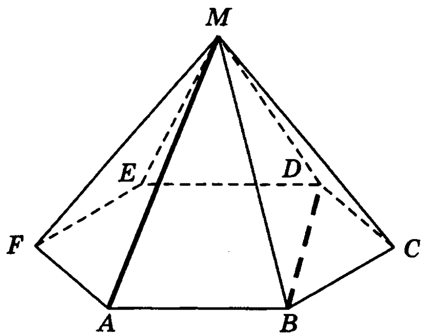
2 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, точка E — середина ребра MC. Найдите угол между прямыми MA и BE.



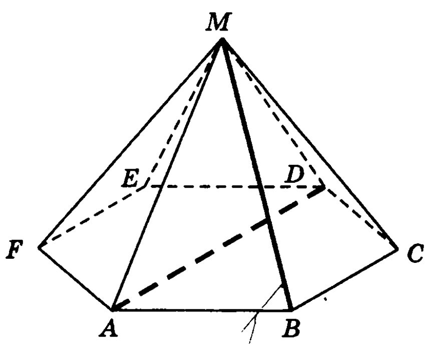
ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 6

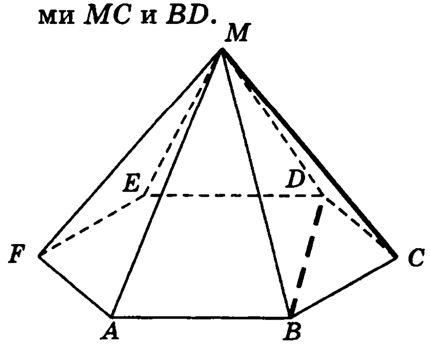
1 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми MA и BD.



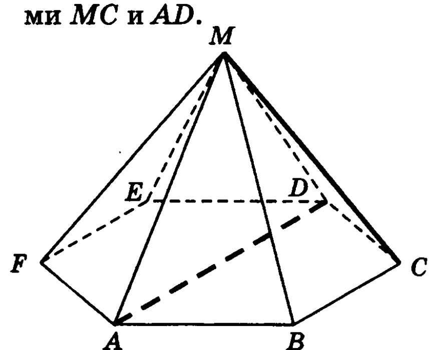
2 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми MB и AD.



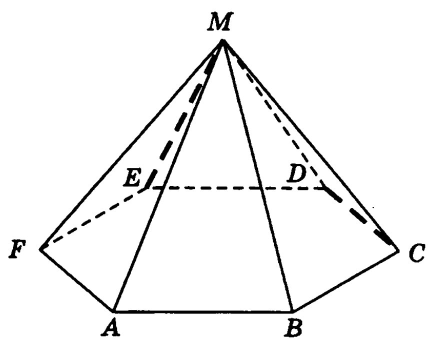
3 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми MC и BD.



4 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми MC и AD.



5 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите угол между прямыми ME и CD.

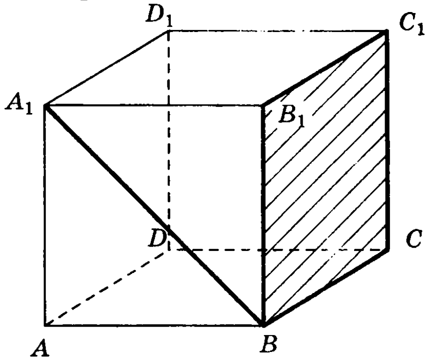


§ 2. Угол между прямой и плоскостью

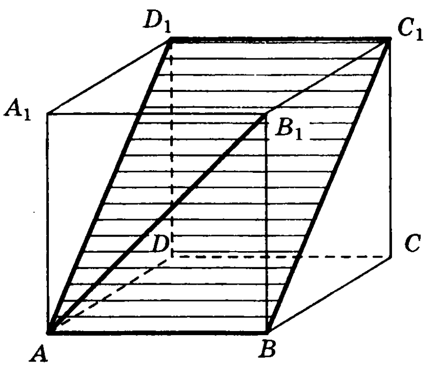
КУБ

Таблица 7

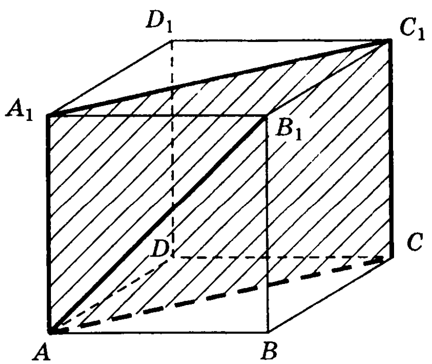
1 В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой A_1B и плоскостью BCC_1.



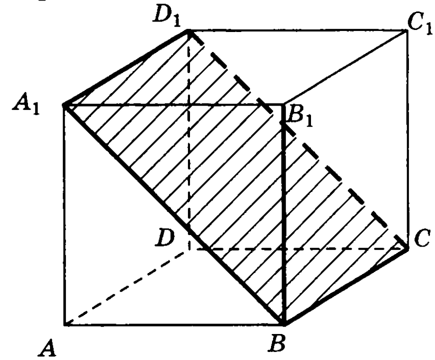
2 В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.



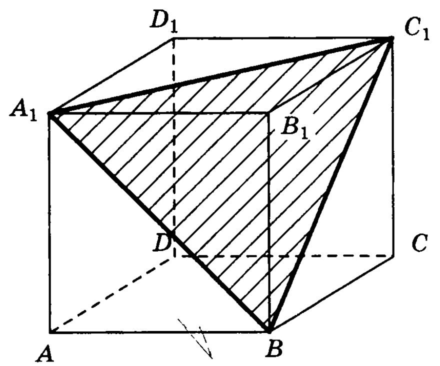
3 В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ACC_1.



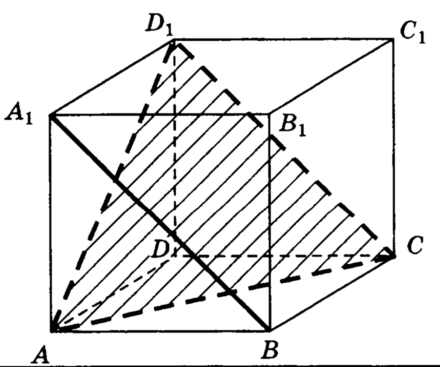
4 В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой BB_1 и плоскостью A_1BC.



5 В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой DD_1 и плоскостью A_1BC_1.

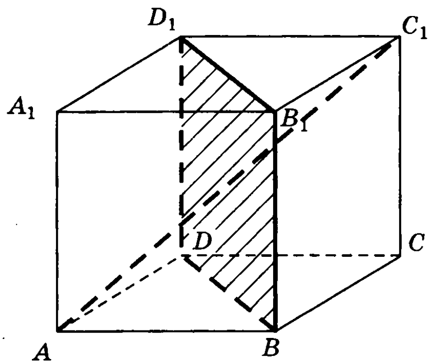


6 В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой A_1B и плоскостью ACD_1.

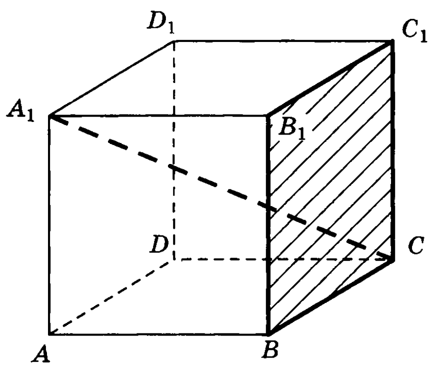


Продолжение табл. 7

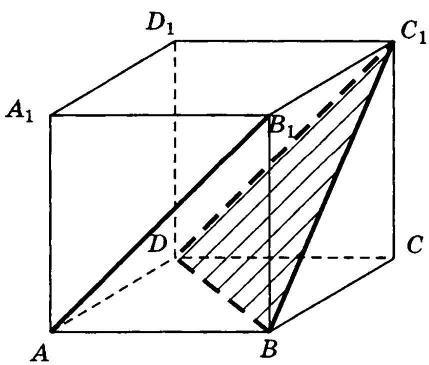
7 В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью BB_1D_1.



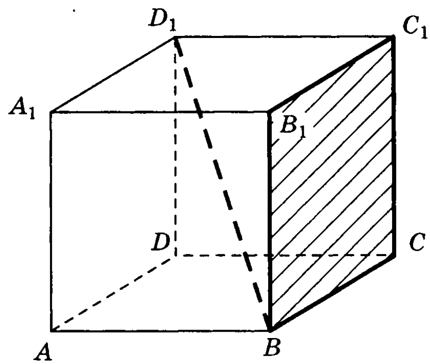
8 В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой A_1C и плоскостью BCC_1.



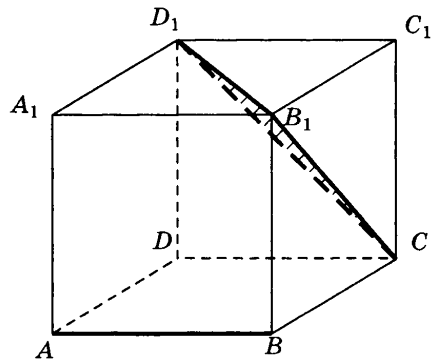
9 В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BC_1D.



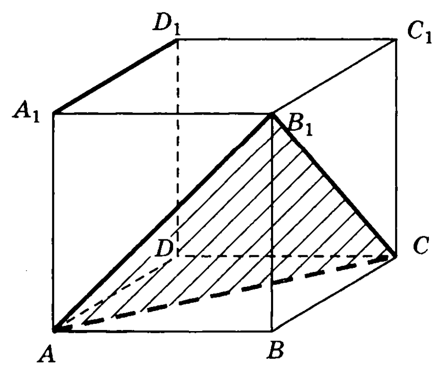
10 В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой BD_1 и плоскостью BCC_1.



11 В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AB и плоскостью CB_1D_1.

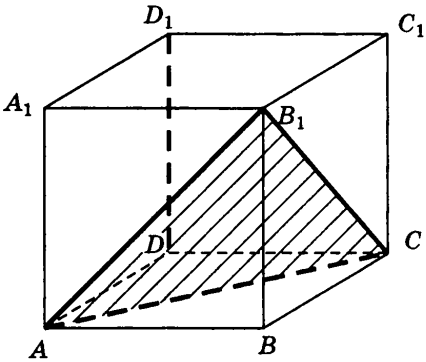


12 В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой A_1D_1 и плоскостью ACB_1.

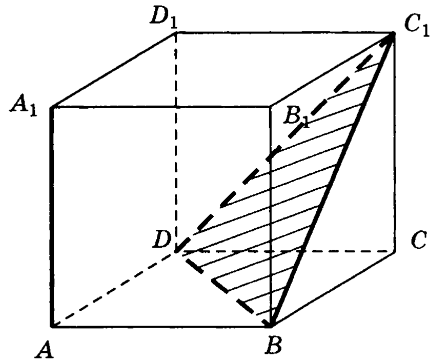


Окончание табл. 7

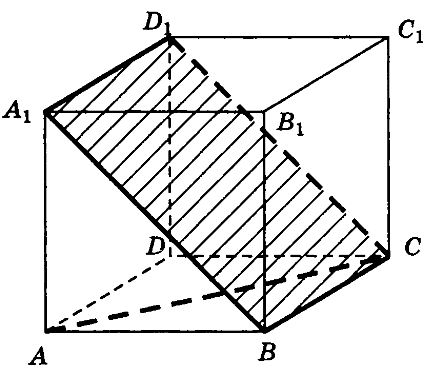
13 В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой DD_1 и плоскостью ACB_1.



15 В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью BC_1D.



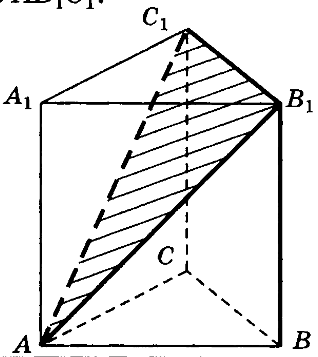
14 В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямой AC и плоскостью BCD_1.



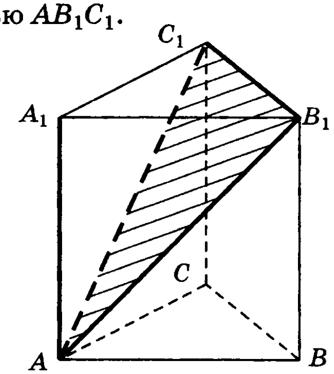
ПРАВИЛЬНАЯ ТРЕУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 8

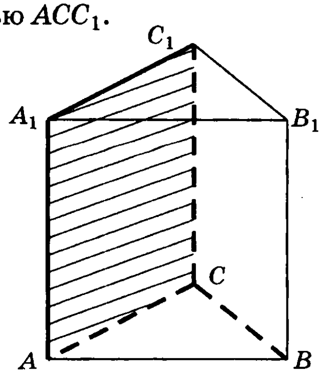
1 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BB_1 и плоскостью AB_1C_1.



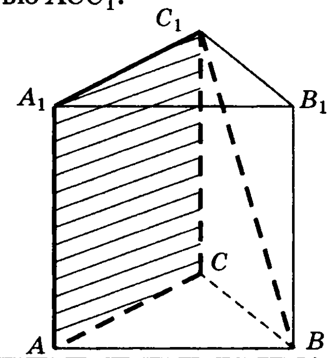
2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью AB_1C_1.



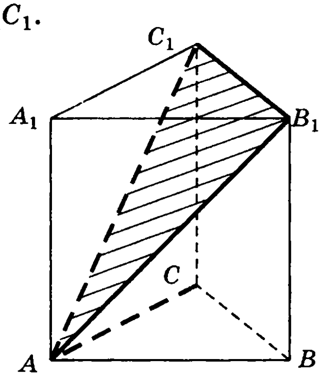
3 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BC и плоскостью ACC_1.



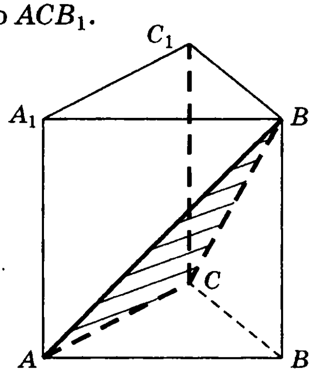
4 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BC_1 и плоскостью ACC_1.



5 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AC и плоскостью AB_1C_1.



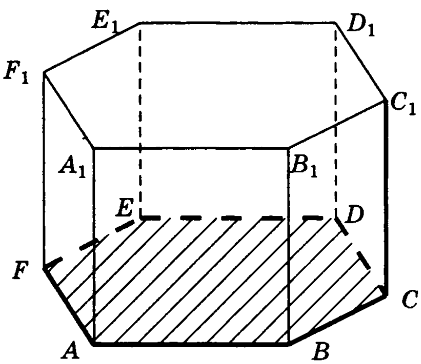
6 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью ACB_1.



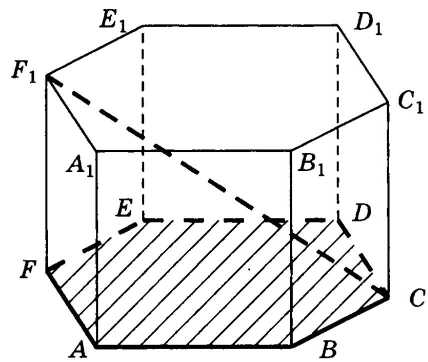
ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 9

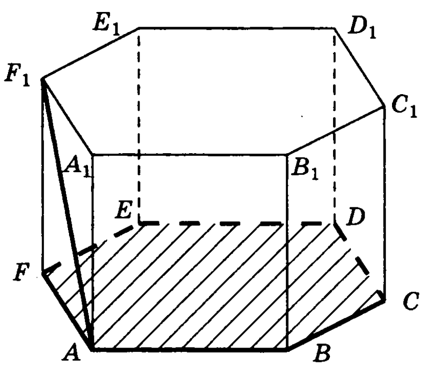
1 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью ABC.



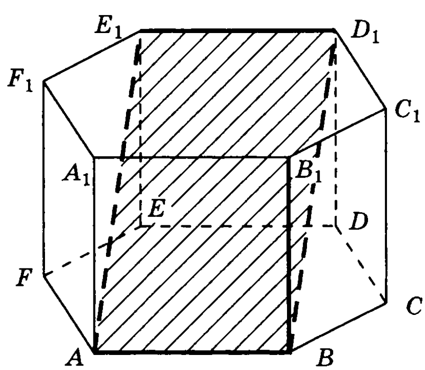
4 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой CF_1 и плоскостью ABC.



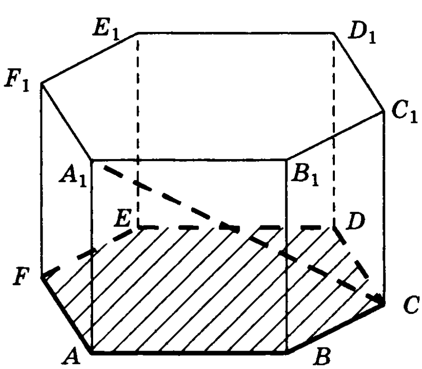
2 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AF_1 и плоскостью ABC.



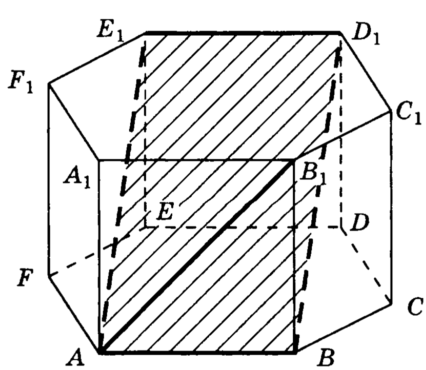
5 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BB_1 и плоскостью ABD_1.



3 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой A_1C и плоскостью ABC.

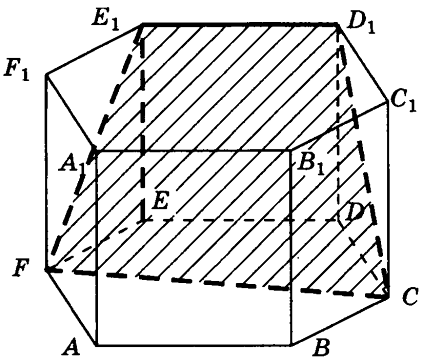


6 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABD_1.

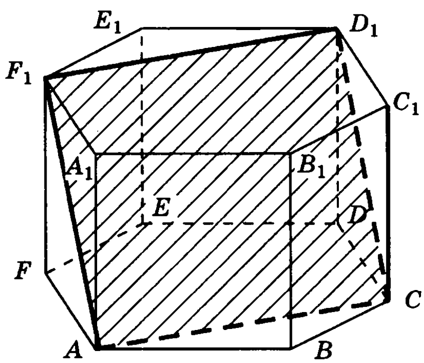


Продолжение табл. 9

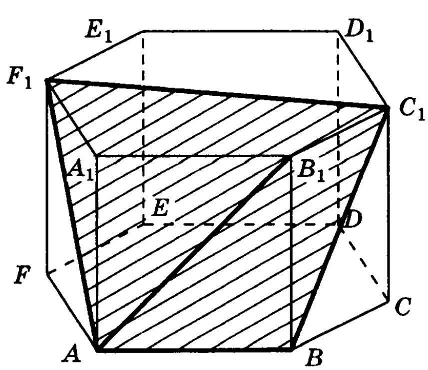
7 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой EE_1 и плоскостью FCD_1.



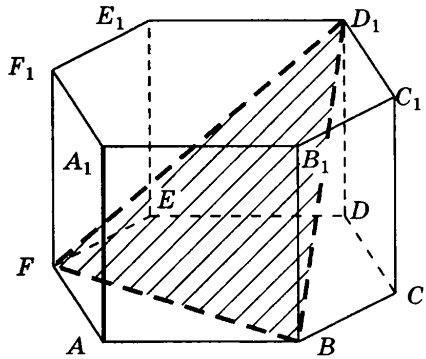
8 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью ACD_1.



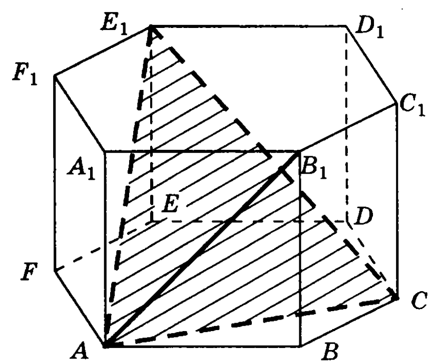
9 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.



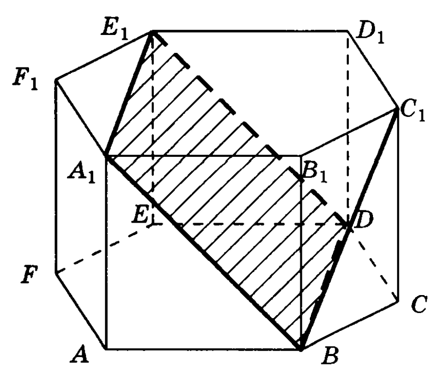
10 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью BD_1F.



11 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ACE_1.

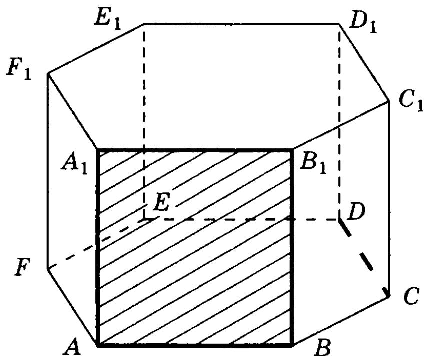


12 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BC_1 и плоскостью BDE_1.

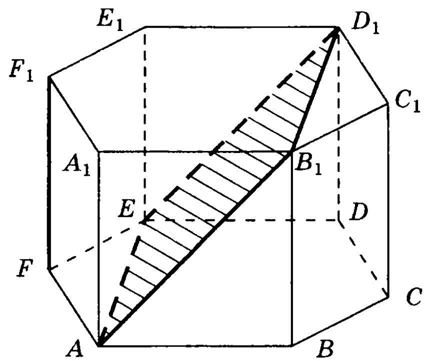


Окончание табл. 9

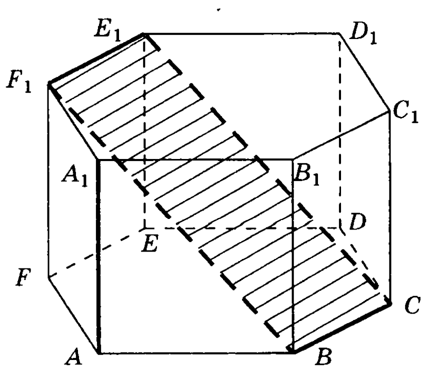
13 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой CD и плоскостью ABB_1.



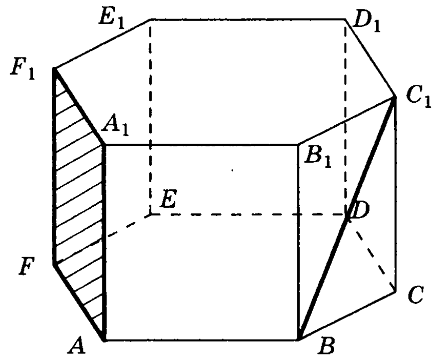
14 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой FF_1 и плоскостью AED_1.



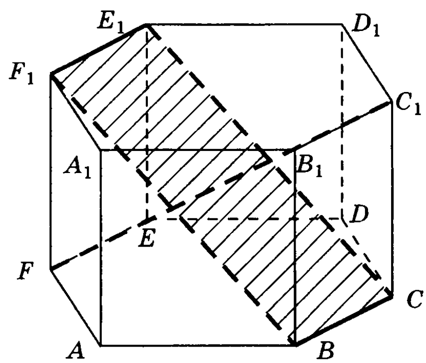
15 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью BCE_1.



16 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BC_1 и плоскостью AFF_1.



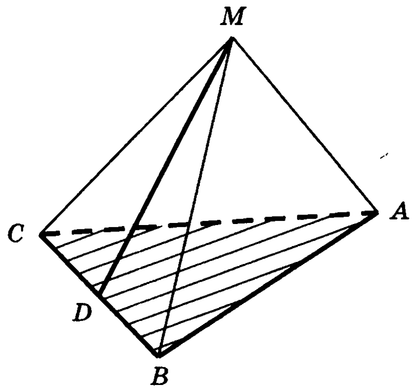
17 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой FC_1 и плоскостью BCE_1.



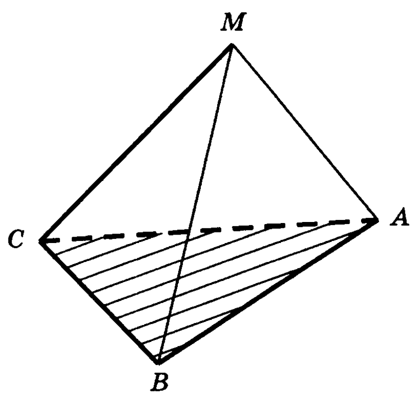
ПРАВИЛЬНЫЙ ТЕТРАЭДР

Таблица 10

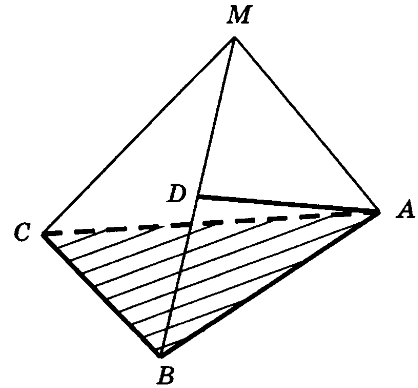
1 В правильном тетраэдре $MABC$, все ребра которого равны 1, найдите угол между апофемой MD и плоскостью ABC.



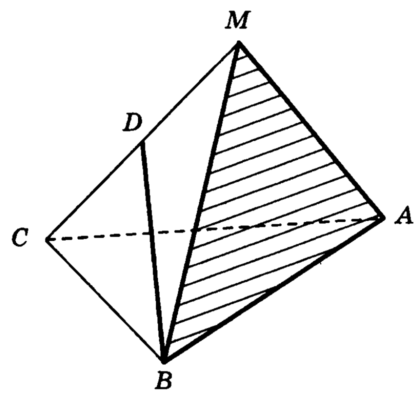
2 В правильном тетраэдре $MABC$, все ребра которого равны 1, найдите угол между ребром MC и плоскостью ABC.



3 В правильном тетраэдре $MABC$, все ребра которого равны 1, точка D — середина ребра BM. Найдите угол между прямой AD и плоскостью ABC.



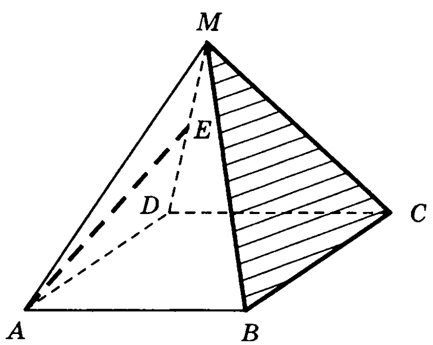
4 В правильном тетраэдре $MABC$, все ребра которого равны 1, найдите угол между медианой BD грани MBC и плоскостью MAB.



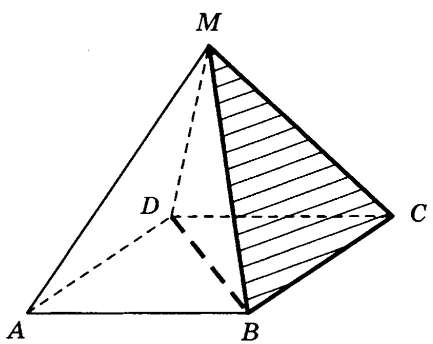
ПРАВИЛЬНАЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 11

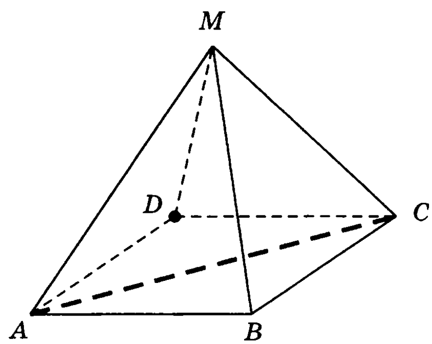
1 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AE и плоскостью MBC, где E — середина MD.



2 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BD и плоскостью MBC.



3 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостью, проходящей через точку D перпендикулярно AC.

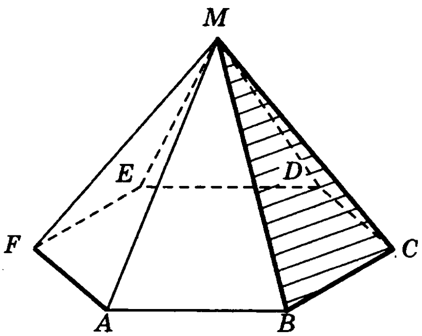


ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 12

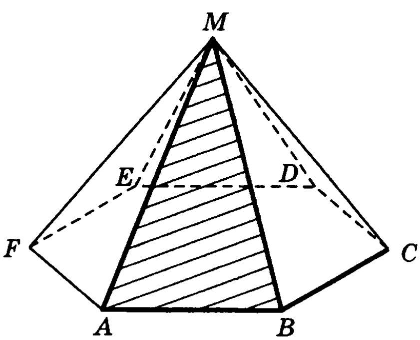
1

В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите синус угла между прямой AF и плоскостью MBC.



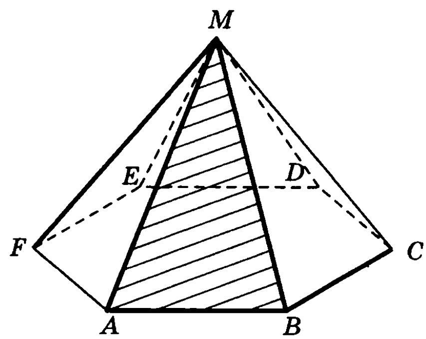
2

В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите синус угла между прямой BC и плоскостью MAB.



3

В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите синус угла между прямой MF и плоскостью MAB.

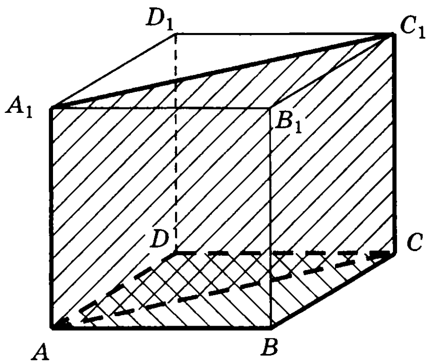


§ 3. Угол между двумя плоскостями

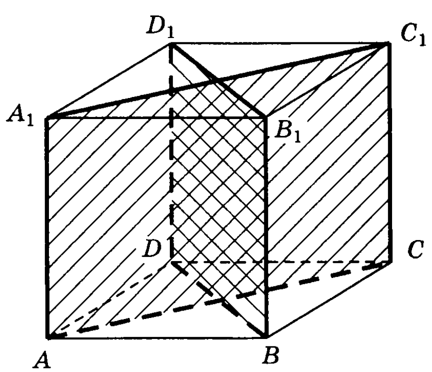
КУБ

Таблица 13

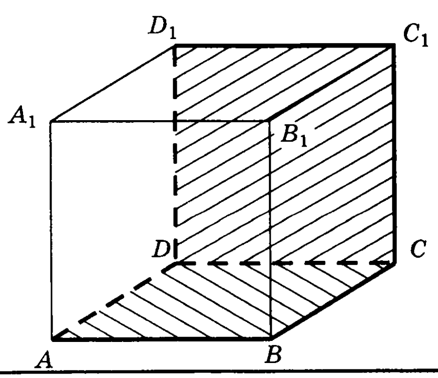
1 В кубе $A...D_1$ найдите углы между плоскостями ABC и ACC_1.



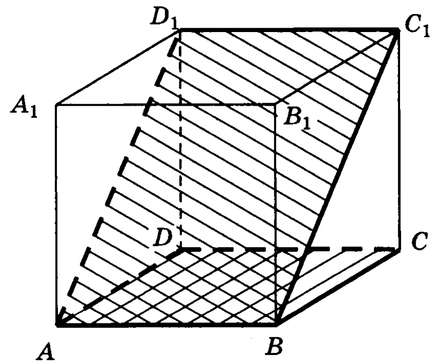
2 В кубе $A...D_1$ найдите углы между плоскостями ACC_1 и BDD_1.



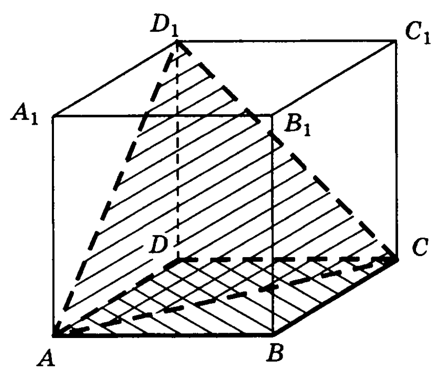
3 В кубе $A...D_1$ найдите углы между плоскостями ABC и CDD_1.



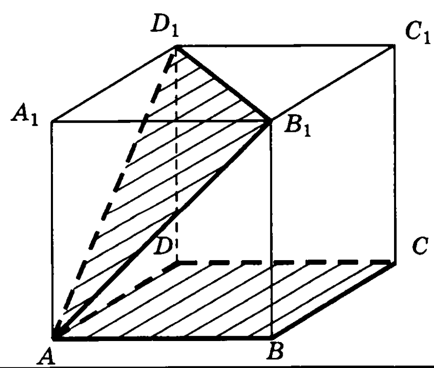
4 В кубе $A...D_1$ найдите углы между плоскостями ABC_1 и ABC.



5 В кубе $A...D_1$ найдите углы между плоскостями ABC и ACD_1.

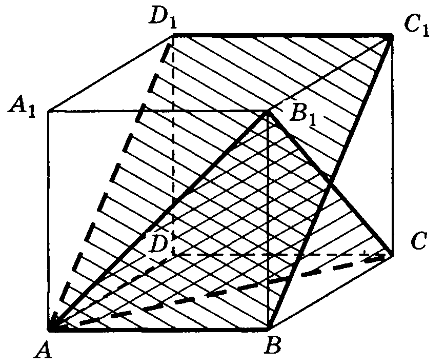


6 В кубе $A...D_1$ найдите углы между плоскостями ABC и AB_1D_1.

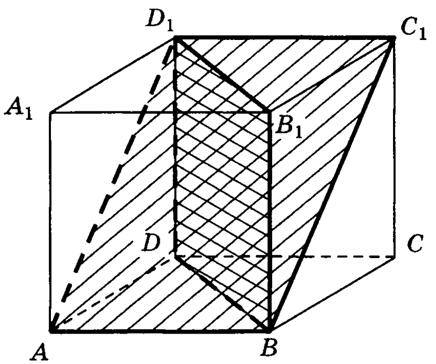


Продолжение табл. 13

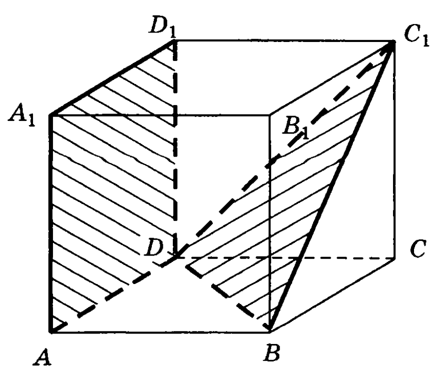
7 В кубе $A...D_1$ найдите углы между плоскостями ABC_1 и AB_1C.



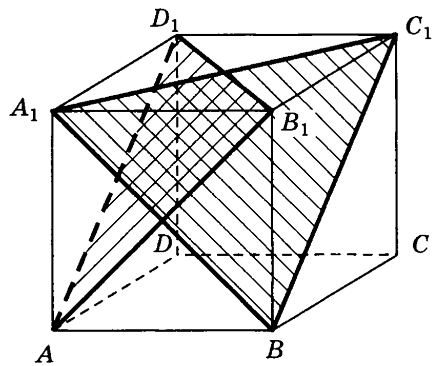
8 В кубе $A...D_1$ найдите углы между плоскостями ABC_1 и BB_1D_1.



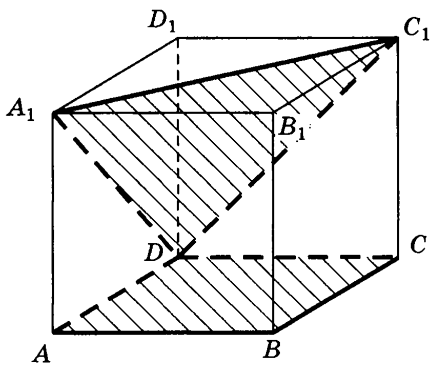
9 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями BDC_1 и ADD_1.



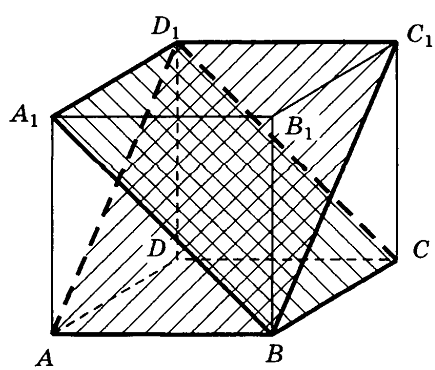
10 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями AB_1D_1 и BA_1C_1.



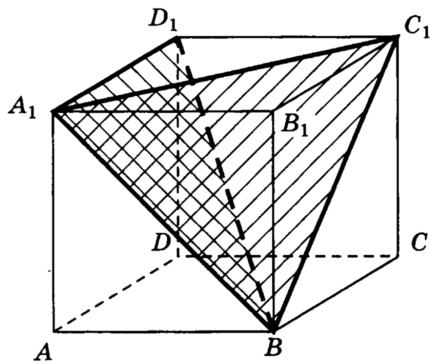
11 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и DA_1C_1.



12 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями ABC_1 и BCD_1.



Окончание табл. 13

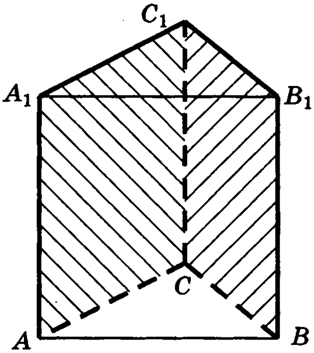
13	В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями BA_1C_1 и BA_1D_1. 

ПРАВИЛЬНАЯ ТРЕУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 14

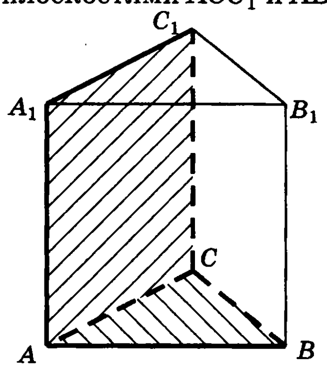
1

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ACC_1 и BCC_1.



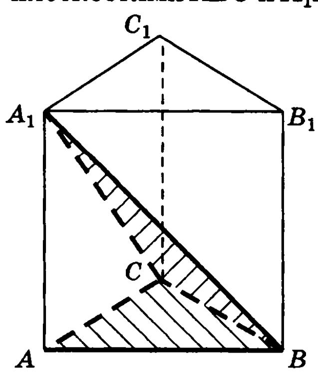
2

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ACC_1 и ABC.



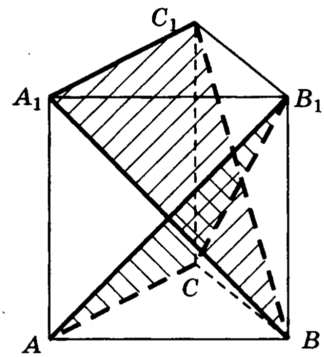
3

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и A_1BC.



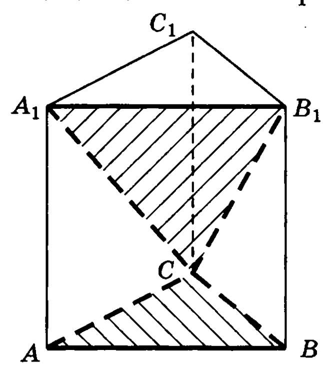
4

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями AB_1C и A_1BC_1.



5

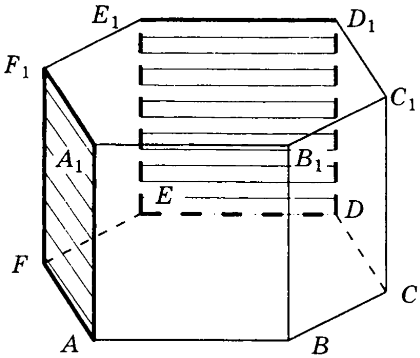
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и A_1CB_1.



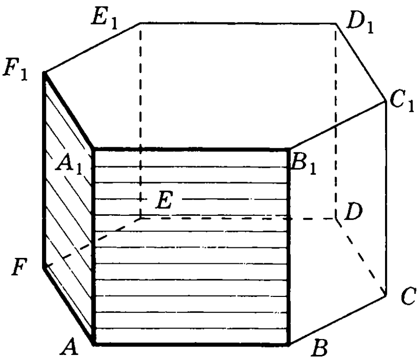
ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 15

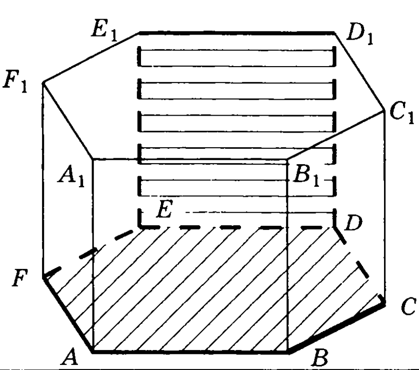
1 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями AFF_1 и DD_1E_1.



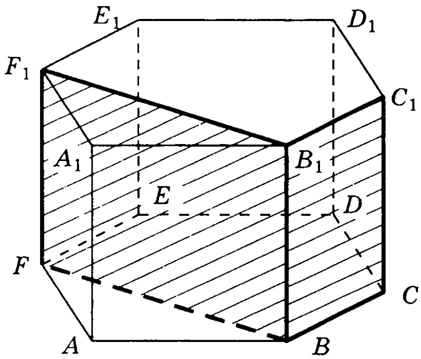
2 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABB_1 и AFF_1.



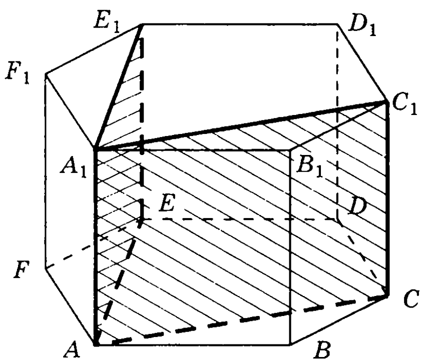
3 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и DEE_1.



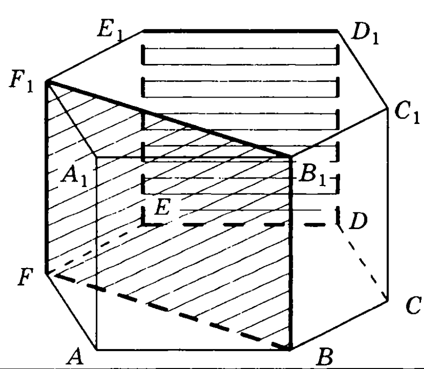
4 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями BFF_1 и BCC_1.



5 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ACC_1 и AEE_1.

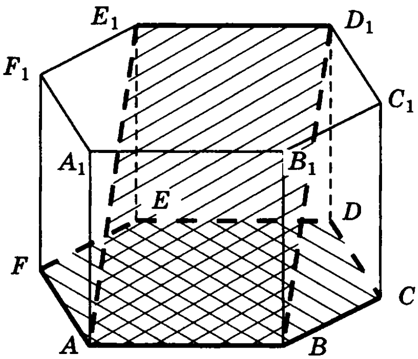


6 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями BFF_1 и DEE_1.

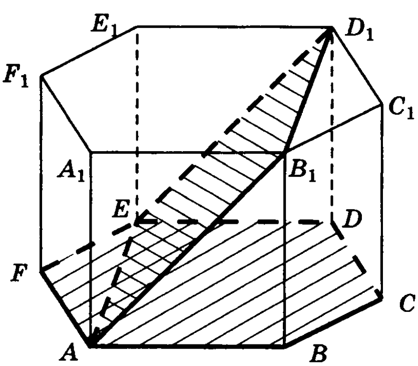


Продолжение табл. 15

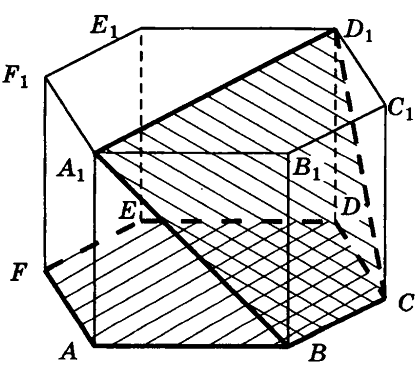
7 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и ABD_1.



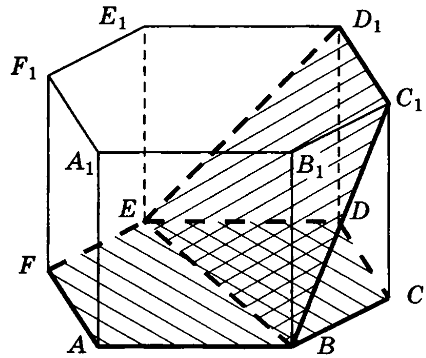
8 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и AB_1D_1.



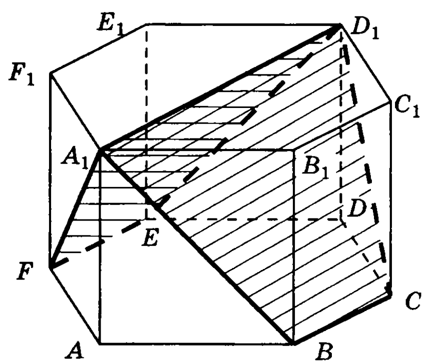
9 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и BCD_1.



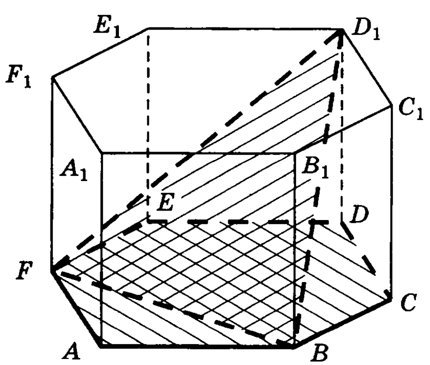
10 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.



11 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями BCD_1 и FED_1.

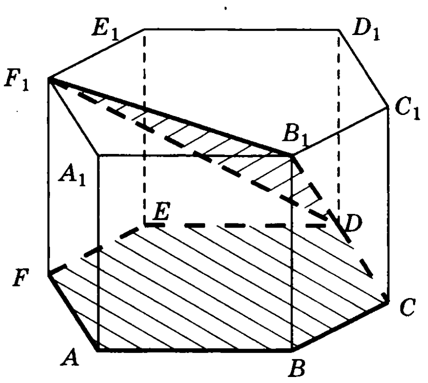


12 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и FBD_1.

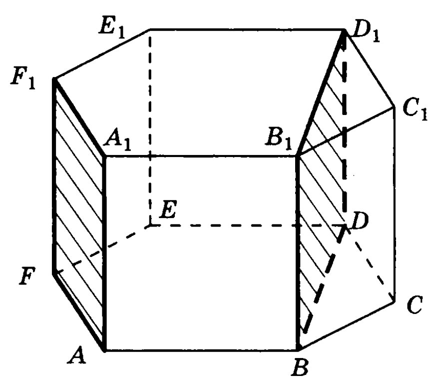


Окончание табл. 15

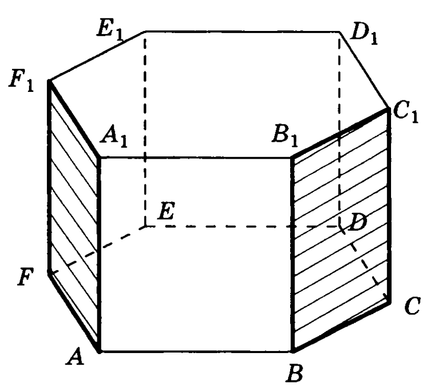
13 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и DB_1F_1.



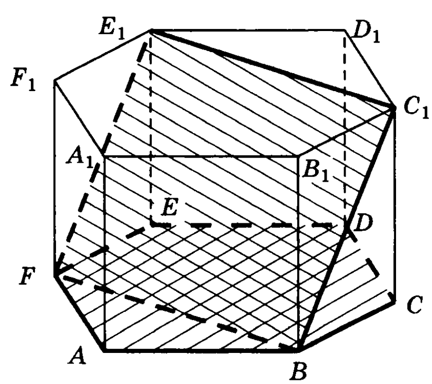
15 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями AFF_1 и BDD_1.



14 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями BCC_1 и AFF_1.



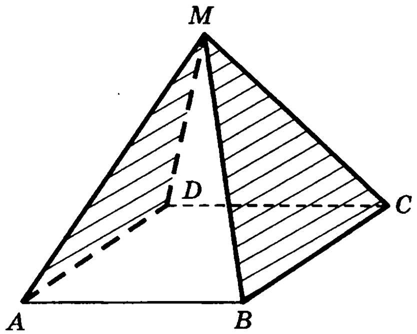
16 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и BFE_1.



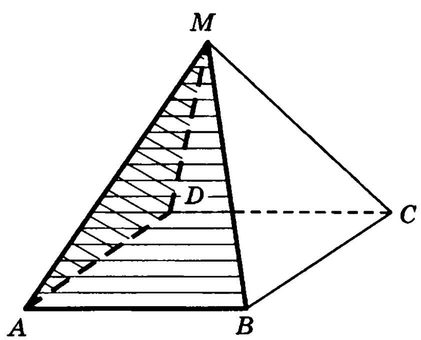
ПРАВИЛЬНАЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 16

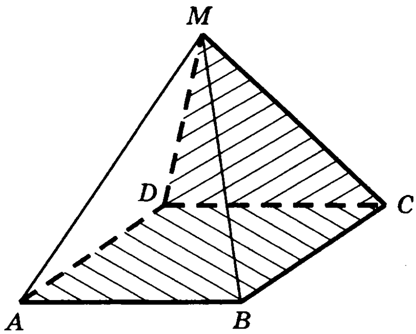
1 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями MAD и MBC.



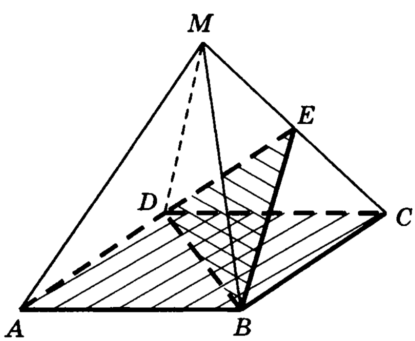
2 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите двугранный угол между гранями MAD и AMB.



3 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и MCD.



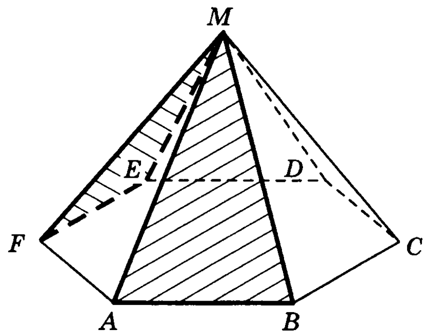
4 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, точка E — середина ребра MC. Найдите угол между плоскостями ABC и BDE.



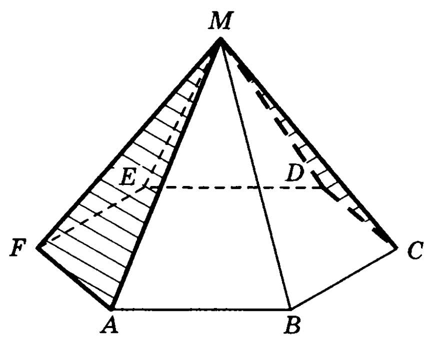
ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 17

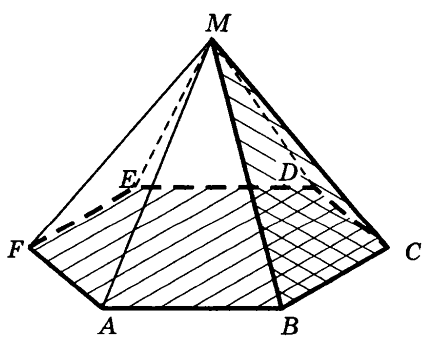
1 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между плоскостями MFE и MAB.



2 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между плоскостями MAF и MCD.



3 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между плоскостями ABC и MBC.

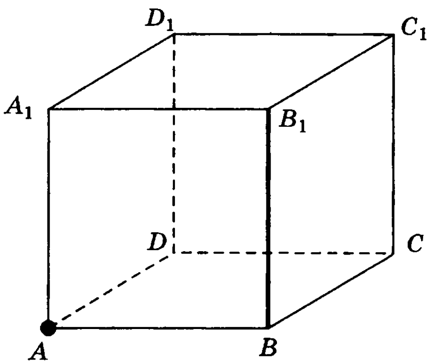


§ 4. Расстояние от точки до прямой

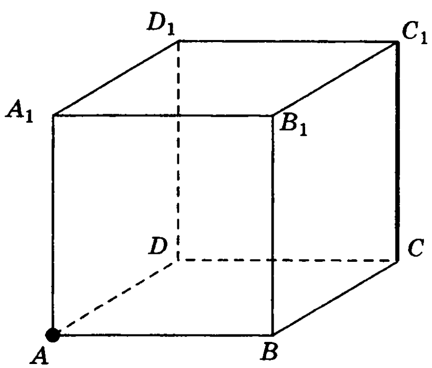
КУБ

Таблица 18

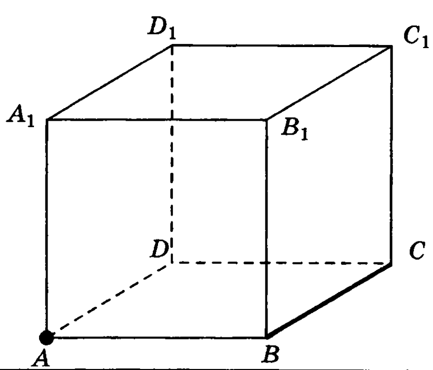
1 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой BB_1.



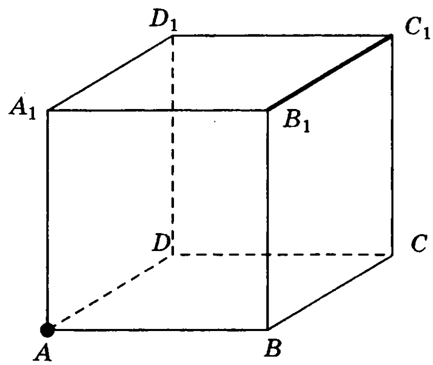
2 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой CC_1.



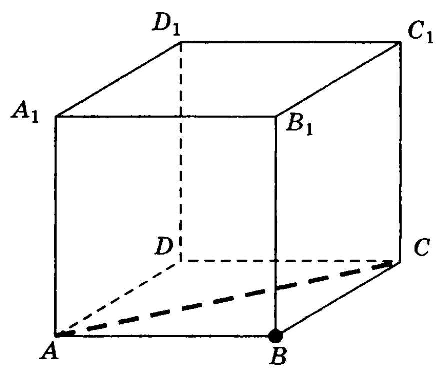
3 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой BC.



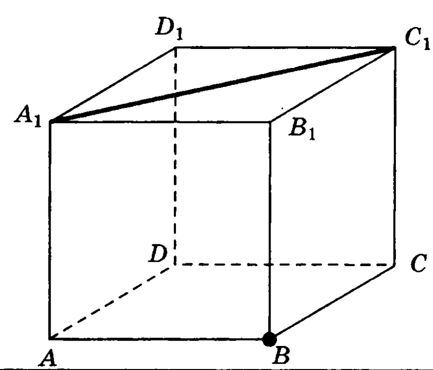
4 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой B_1C_1.



5 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой AC.

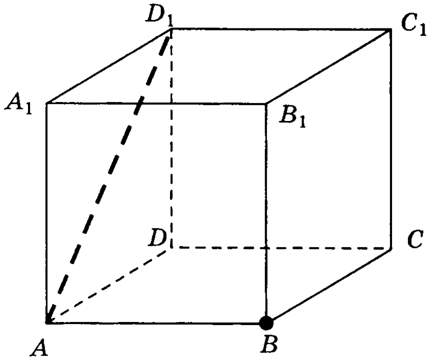


6 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой A_1C_1.

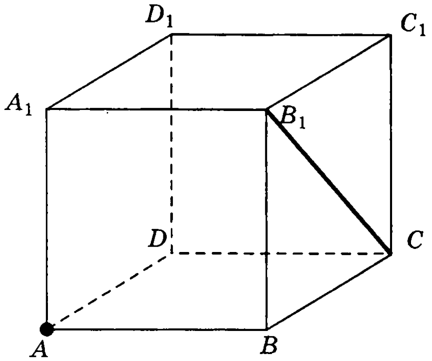


Продолжение табл. 18

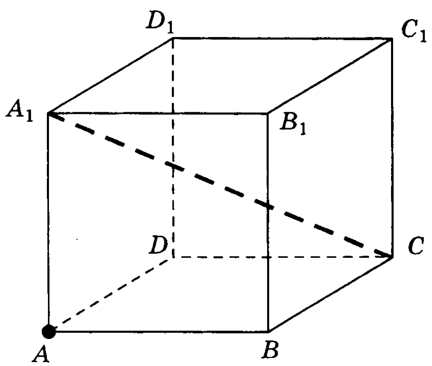
7 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой AD_1.



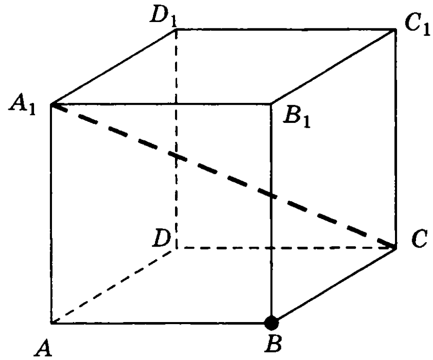
8 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой B_1C.



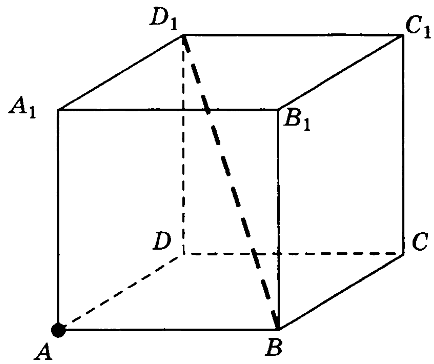
9 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой A_1C.



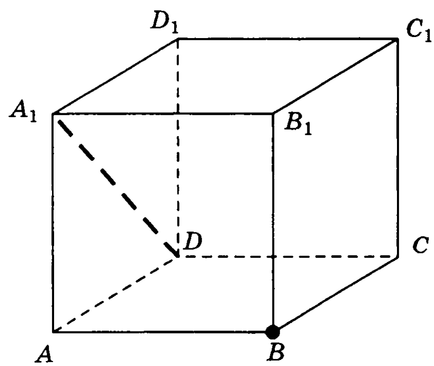
10 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой A_1C.



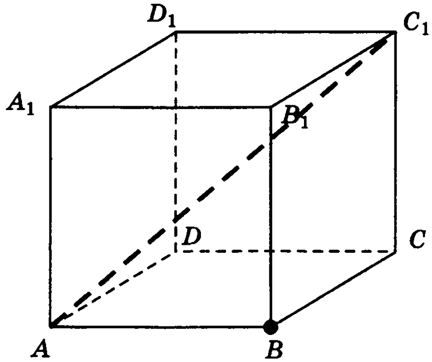
11 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой BD_1.



12 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой DA_1.



Окончание табл. 18

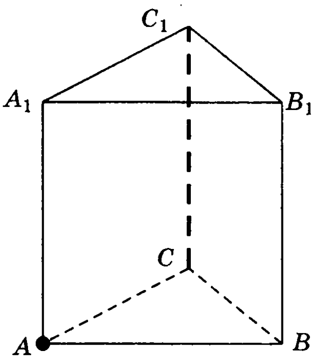
13	В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой AC_1. 

ПРАВИЛЬНАЯ ТРЕУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 19

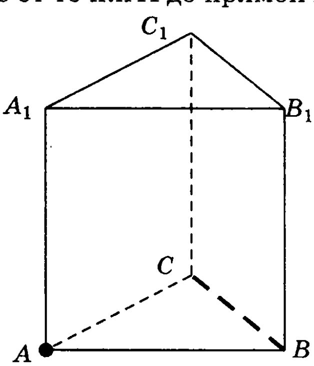
1

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой CC_1.



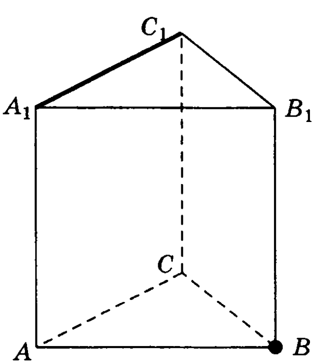
2

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой BC.



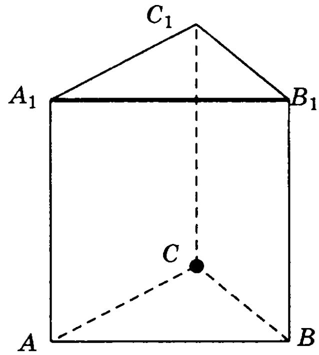
3

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой A_1C_1.



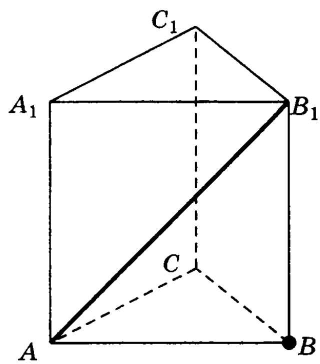
4

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до прямой A_1B_1.



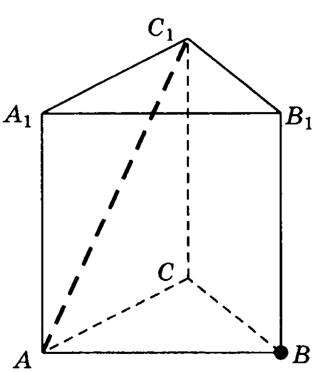
5

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой AB_1.



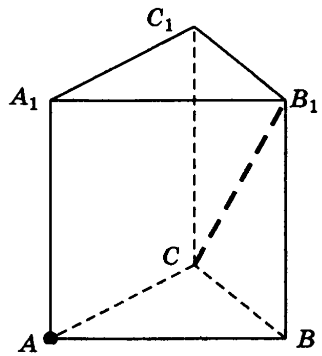
6

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой AC_1.



Окончание табл. 19

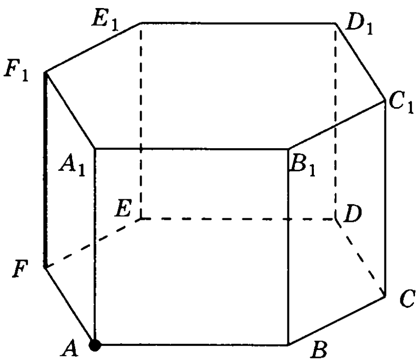
7 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой CB_1.



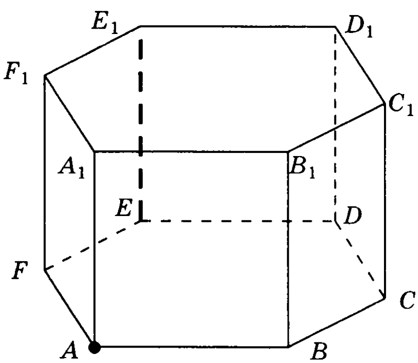
ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 20

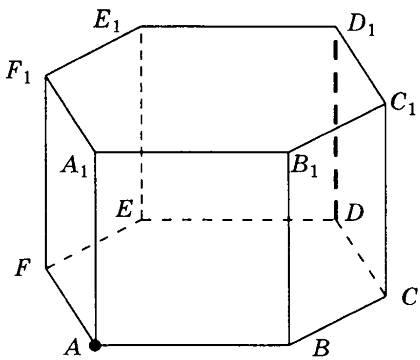
1 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой FF_1.



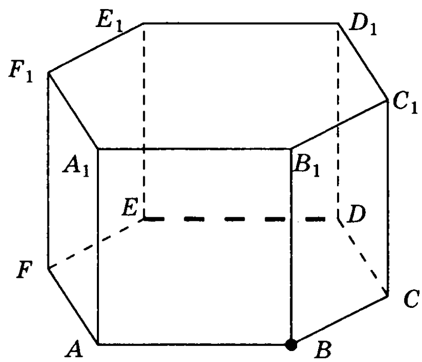
2 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой EE_1.



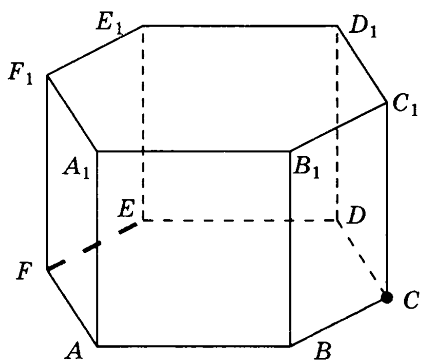
3 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой DD_1.



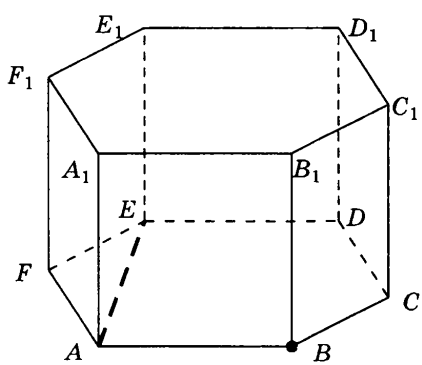
4 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой DE.



5 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до прямой FE.

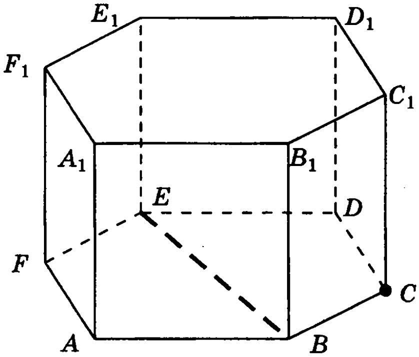


6 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой AE.

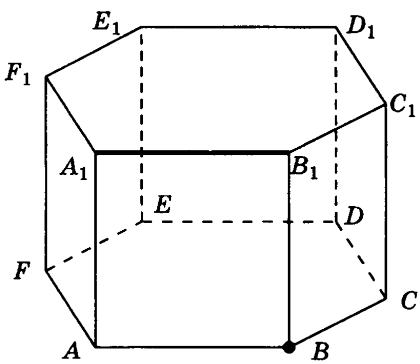


Продолжение табл. 20

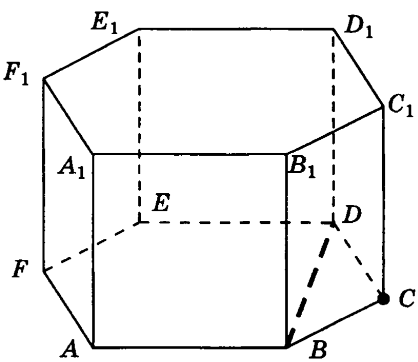
7 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до прямой BE.



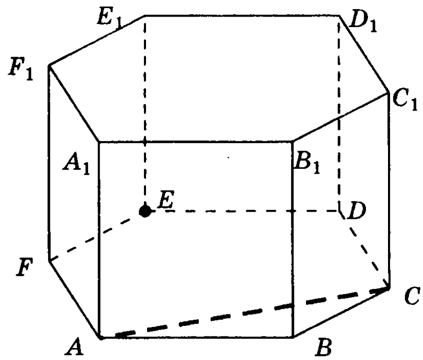
8 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой A_1B_1.



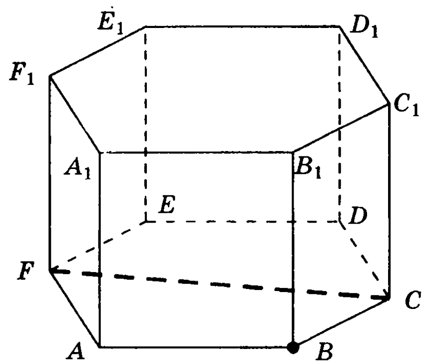
9 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до прямой BD.



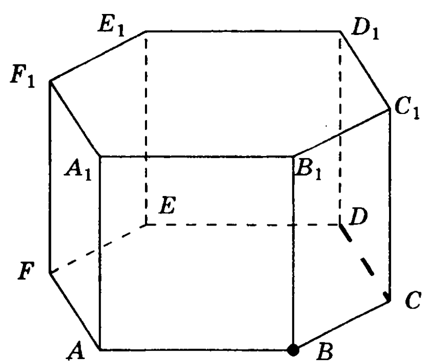
10 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки E до прямой AC.



11 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой FC.

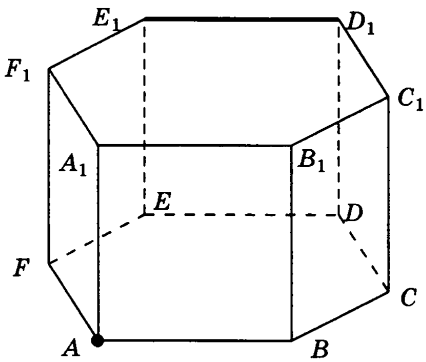


12 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой CD.

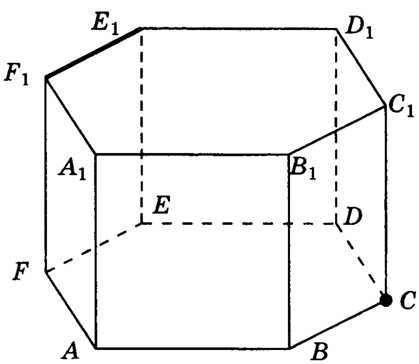


Продолжение табл. 20

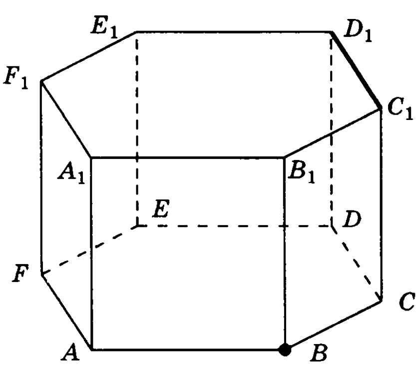
13 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой D_1E_1.



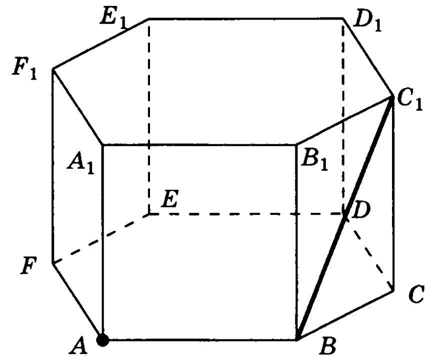
14 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до прямой F_1E_1.



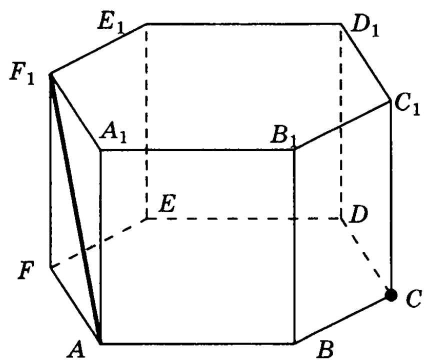
15 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой D_1C_1.



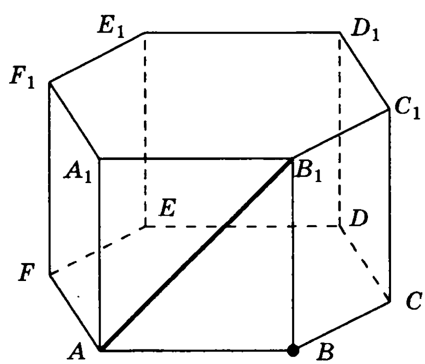
16 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой BC_1.



17 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до прямой AF_1.

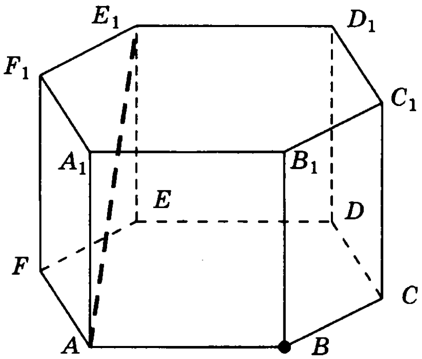


18 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой AB_1.

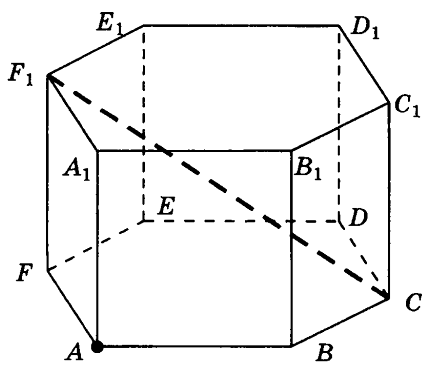


Продолжение табл. 20

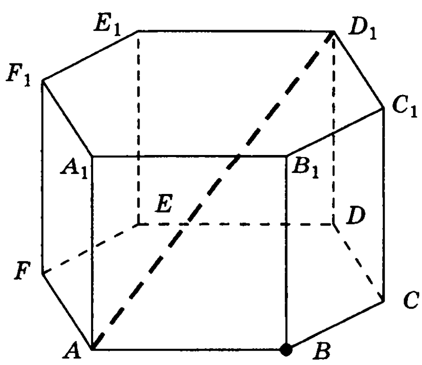
19 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой AE_1.



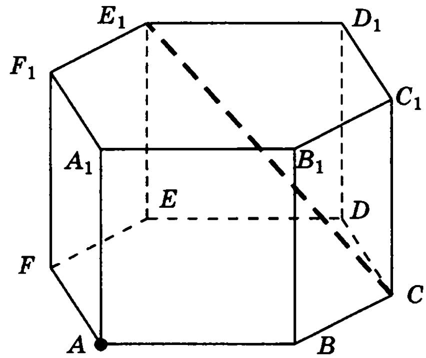
20 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой CF_1.



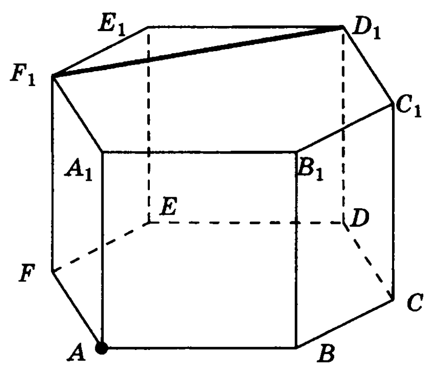
21 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой AD_1.



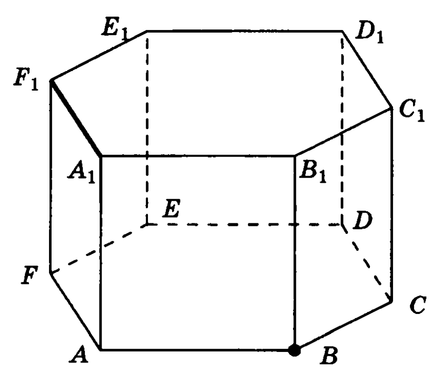
22 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой CE_1.



23 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой D_1F_1.

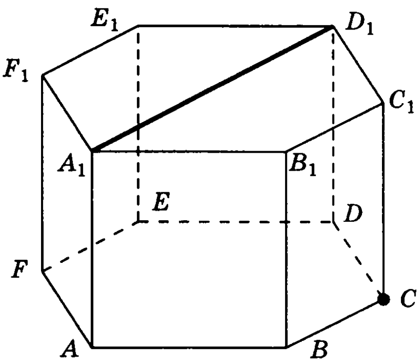


24 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой A_1F_1.

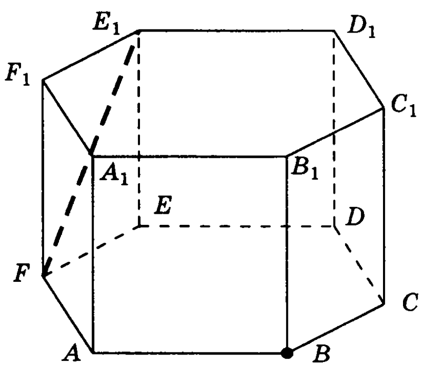


Окончание табл. 20

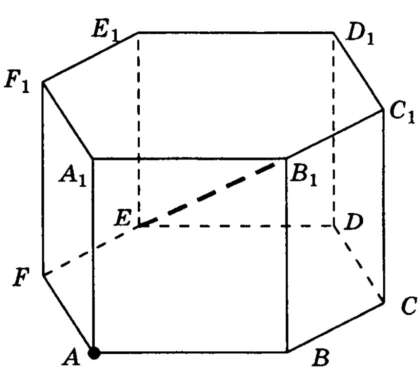
25 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до прямой A_1D_1.



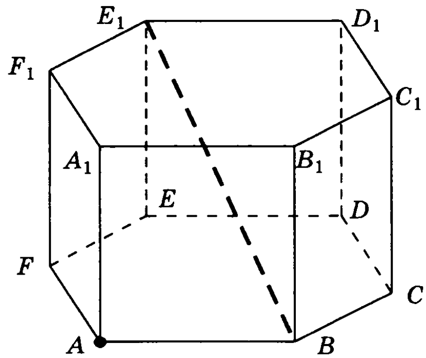
26 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой FE_1.



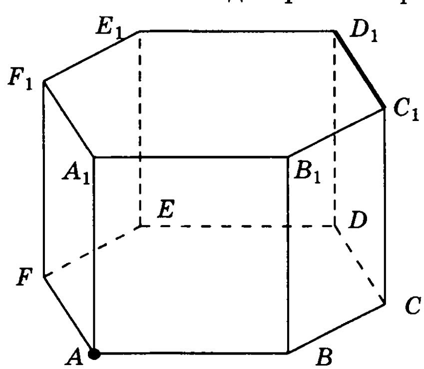
27 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой B_1E.



28 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой BE_1.



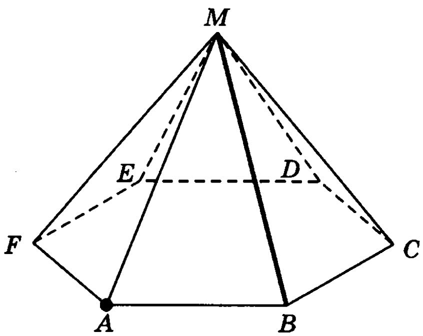
29 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой C_1D_1.



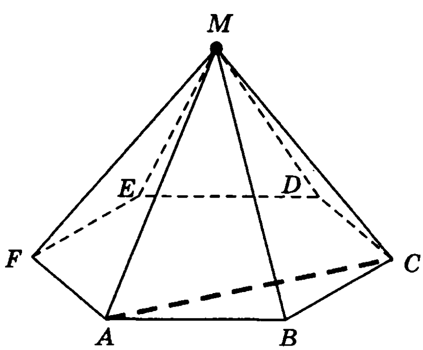
ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 21

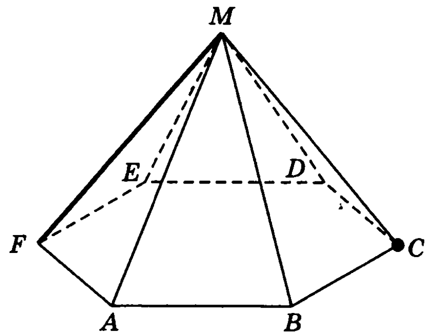
1 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки A до прямой MB.



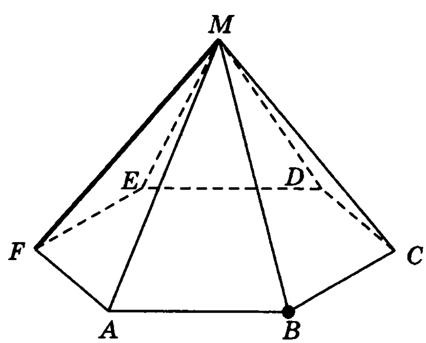
2 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки M до прямой AC.



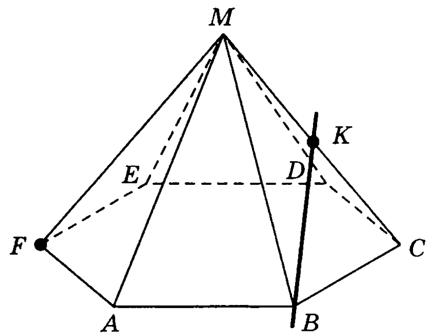
3 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки C до прямой MF.



4 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки B до прямой MF.



Окончание табл. 21

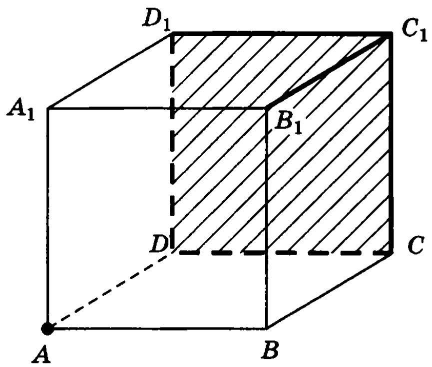
5	В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки F до прямой BK, где K — середина ребра MC. 

§ 5. Расстояние от точки до плоскости

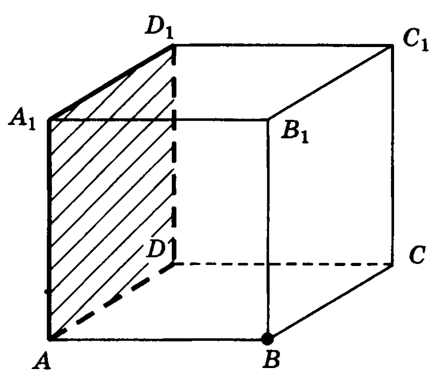
КУБ

Таблица 22

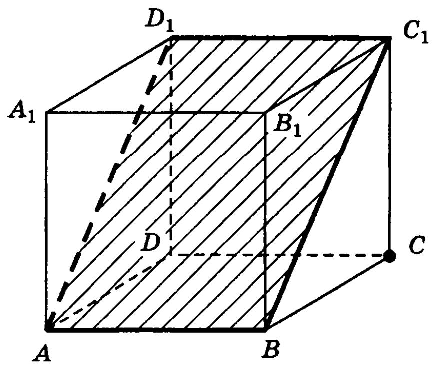
1 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости CDD_1.



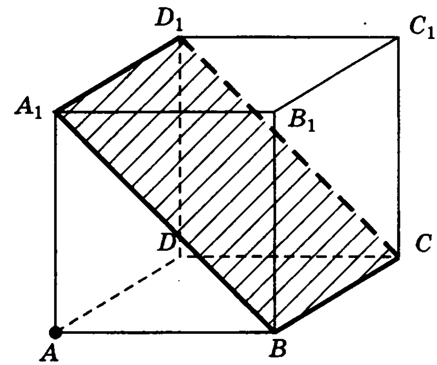
2 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до плоскости ADD_1.



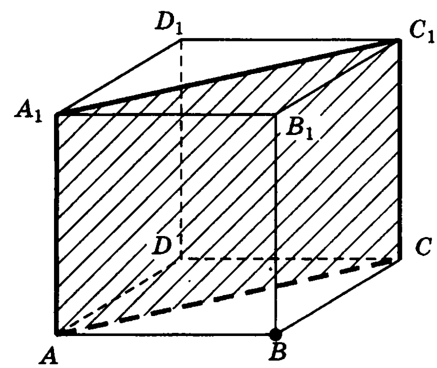
3 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки C до плоскости ABC_1.



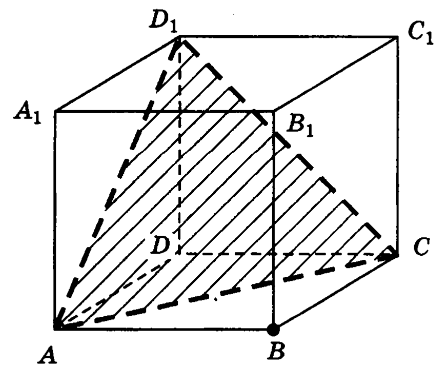
4 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BCD_1.



5 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до плоскости ACC_1.

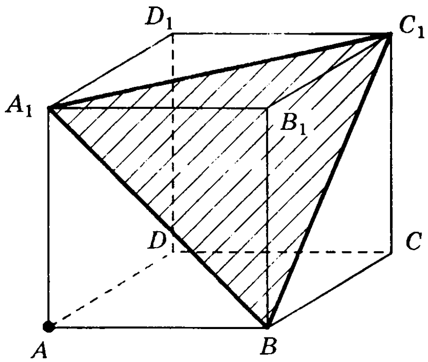


6 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до плоскости ACD_1.

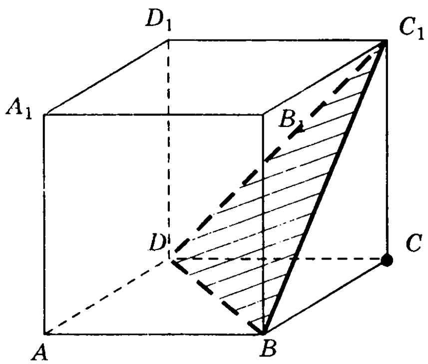


Продолжение табл. 22

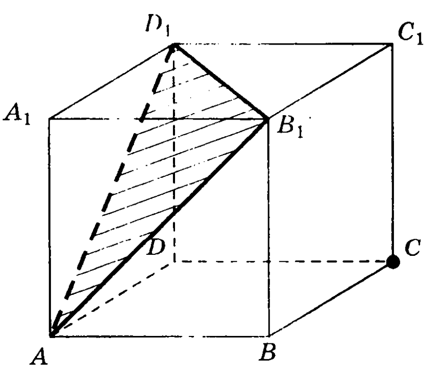
7 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости A_1BC_1.



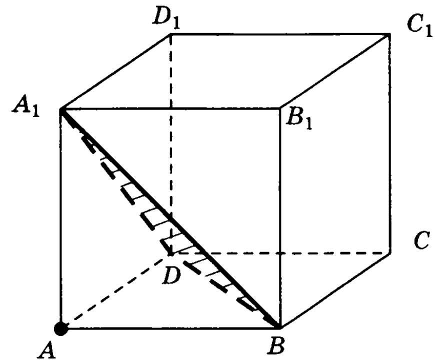
8 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки C до плоскости BDC_1.



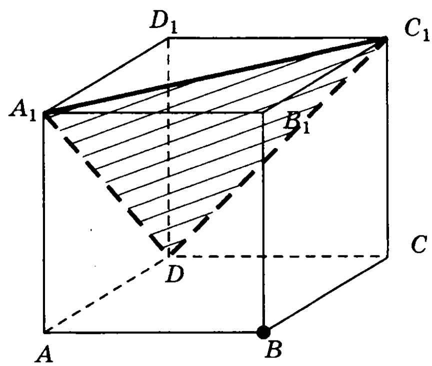
9 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки C до плоскости AB_1D_1.



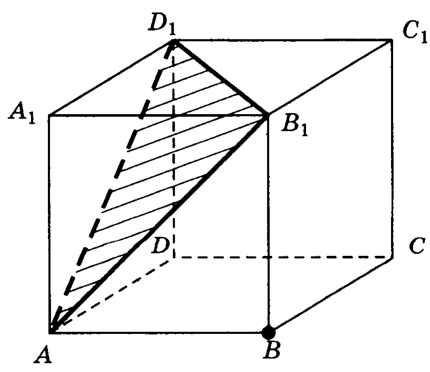
10 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости BDA_1.



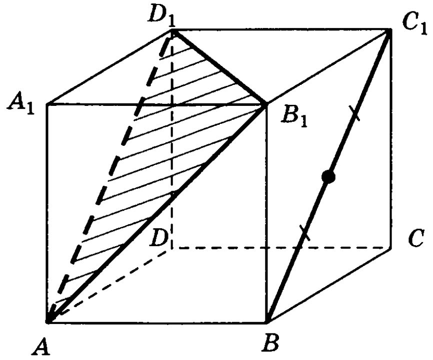
11 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до плоскости DA_1C_1.



12 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от точки B до плоскости AB_1D_1.



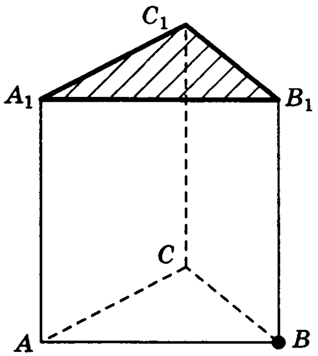
Окончание табл. 22

13	В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние от середины отрезка BC_1 до плоскости AB_1D_1. 

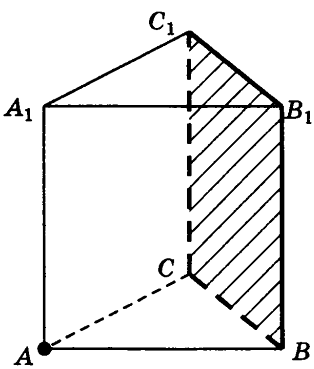
ПРАВИЛЬНАЯ ТРЕУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 23

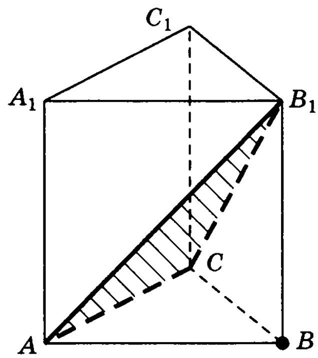
1 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости $A_1B_1C_1$.



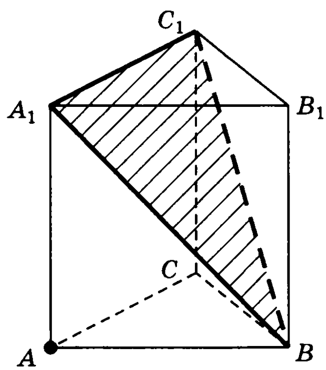
2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BCC_1.



3 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости AB_1C.

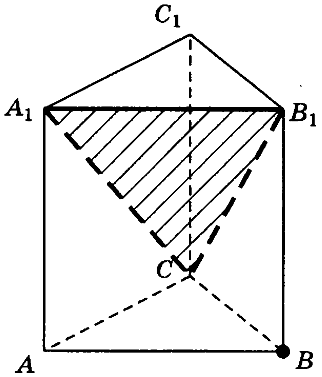


4 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости A_1BC_1.

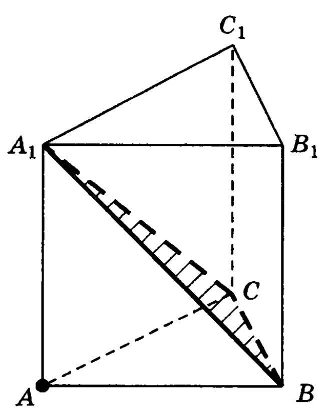


Окончание табл. 23

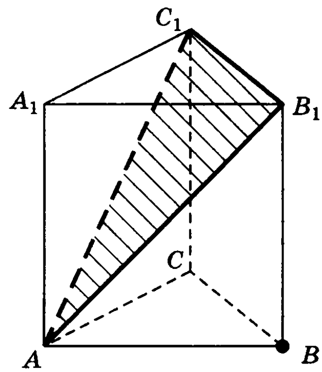
5 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости A_1B_1C.



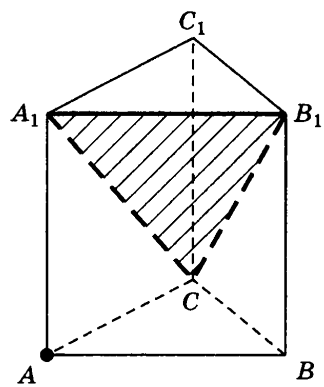
6 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BCA_1.



7 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости AB_1C_1.



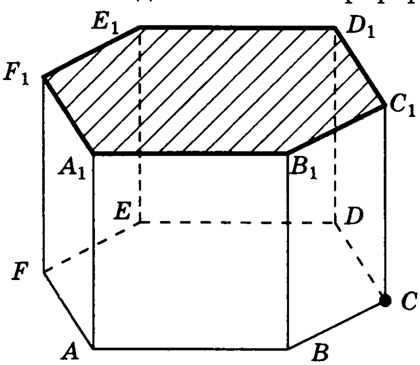
8 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости A_1B_1C.



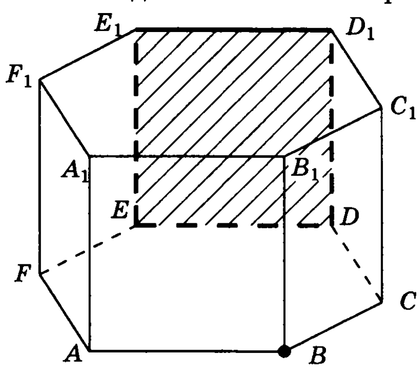
ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 24

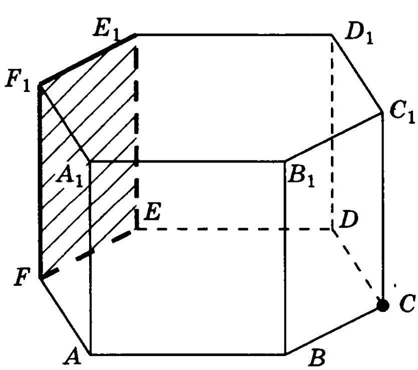
1 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до плоскости $A_1B_1C_1$.



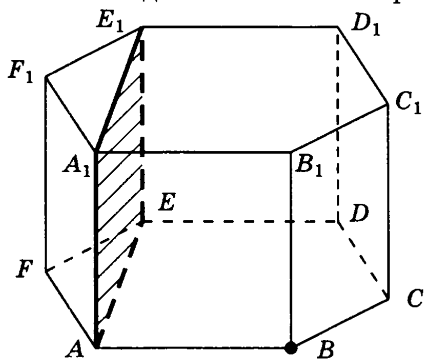
2 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости DEE_1.



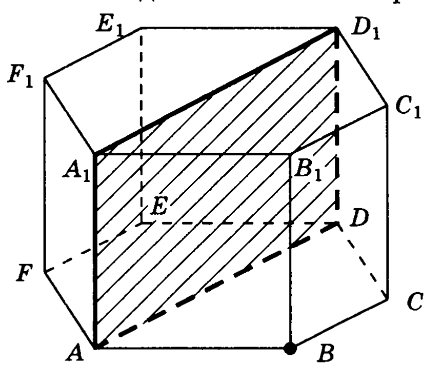
3 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до плоскости EFF_1.



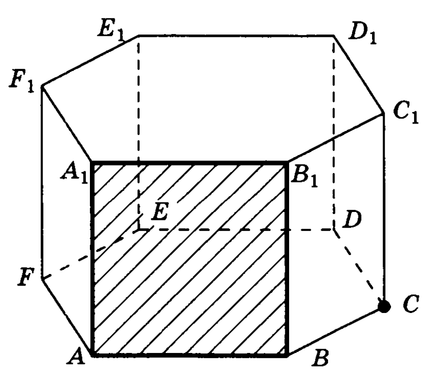
4 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости AEE_1.



5 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости ADD_1.

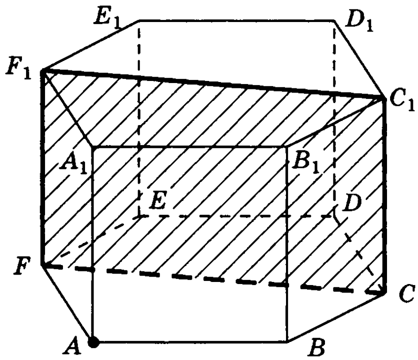


6 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до плоскости ABB_1.

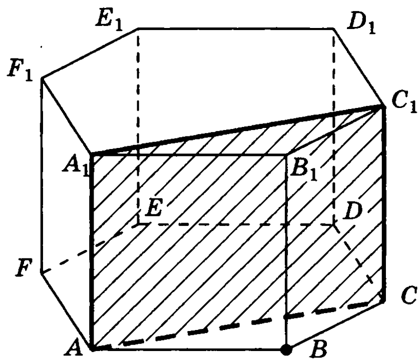


Продолжение табл. 24

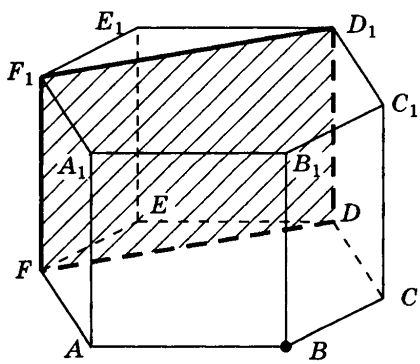
7 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости FCC_1.



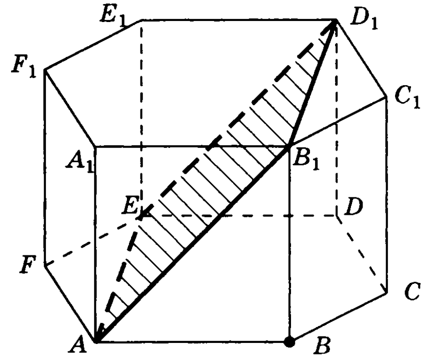
8 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости ACC_1.



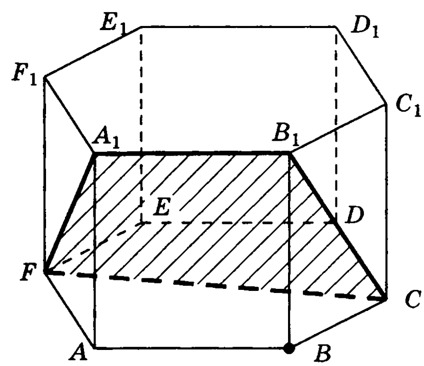
9 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости FDD_1.



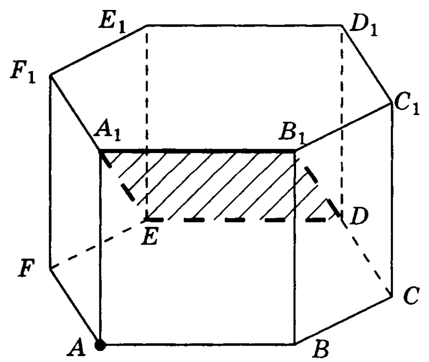
10 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости AED_1.



11 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости CFA_1.

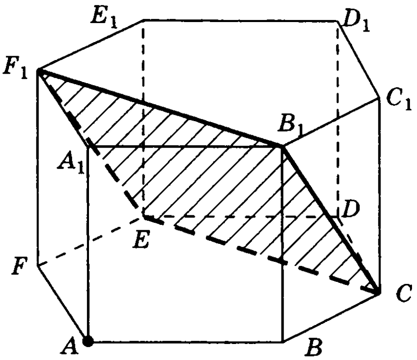


12 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости DEA_1.

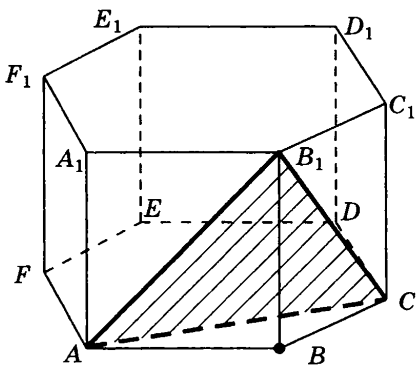


Окончание табл. 24

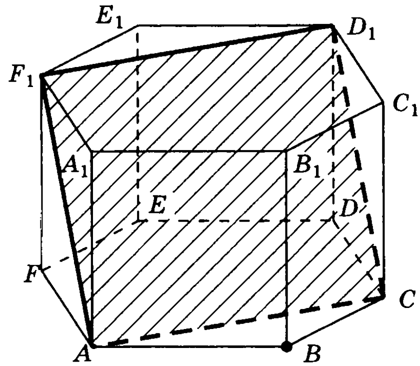
13 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости CEF_1.



14 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости ACB_1.

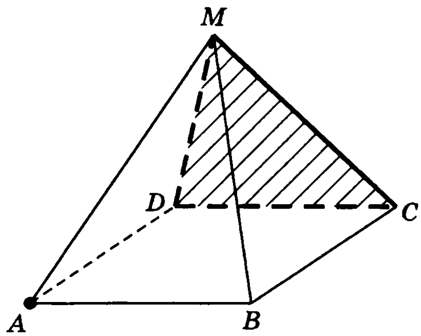
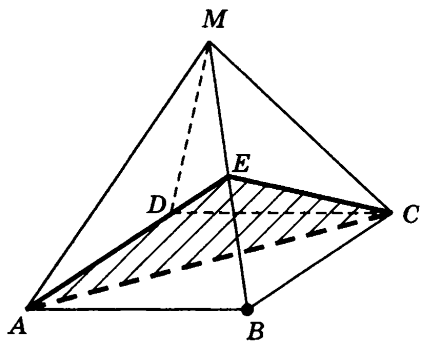


15 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки B до плоскости ACD_1.



ПРАВИЛЬНАЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

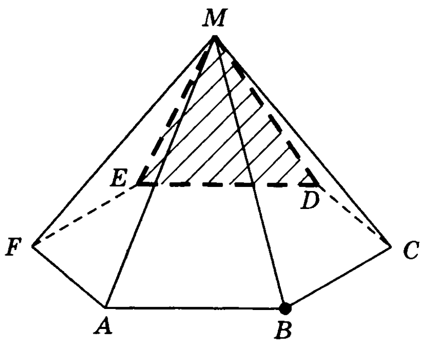
Таблица 25

1 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости MCD. 	**2** В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, точка E — середина ребра BM. Найдите расстояние от точки B до плоскости AEC. 

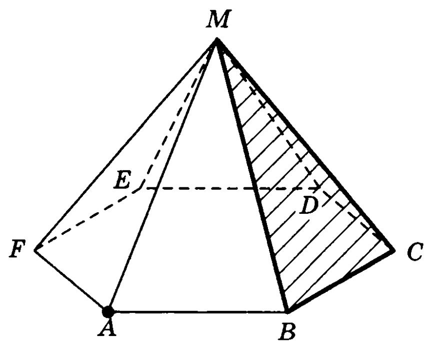
ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 26

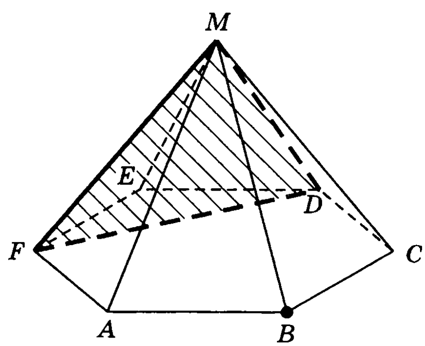
1 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки B до плоскости MED.



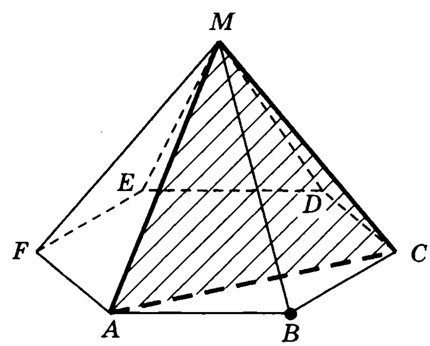
3 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки A до плоскости MBC.



2 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки B до плоскости MDF.



4 В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние от точки B до плоскости MAC.

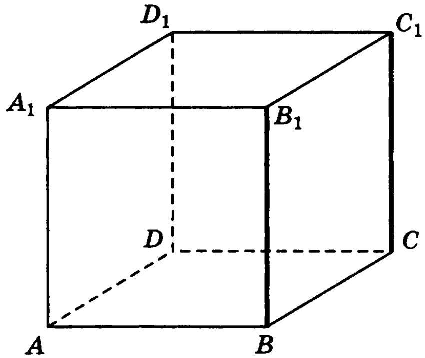


§ 6. Расстояние между двумя прямыми

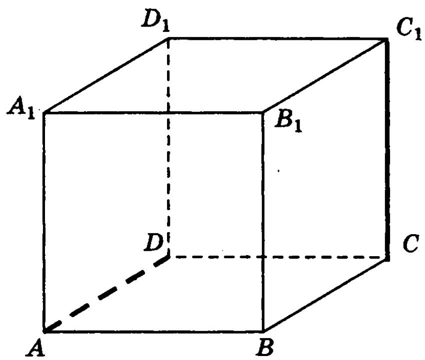
КУБ

Таблица 27

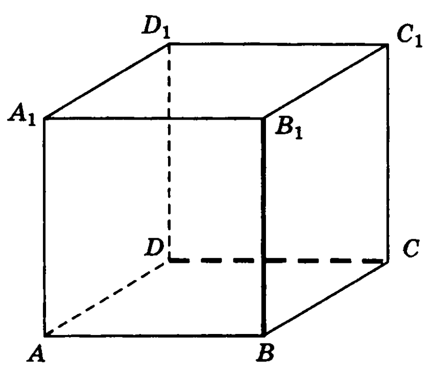
1 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми BB_1 и CC_1.



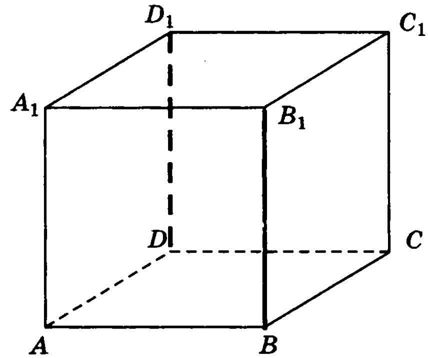
2 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми CC_1 и AD.



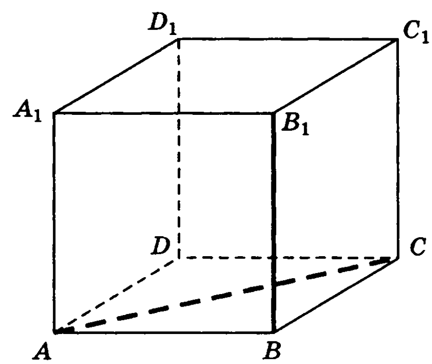
3 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми BB_1 и CD.



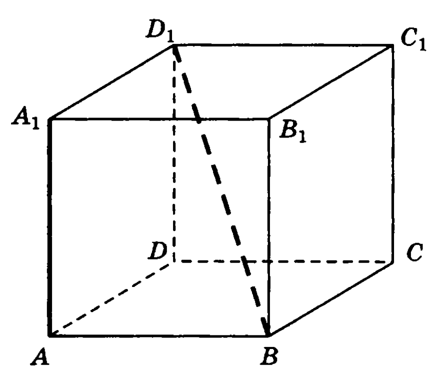
4 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми BB_1 и DD_1.



5 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AC и BB_1.

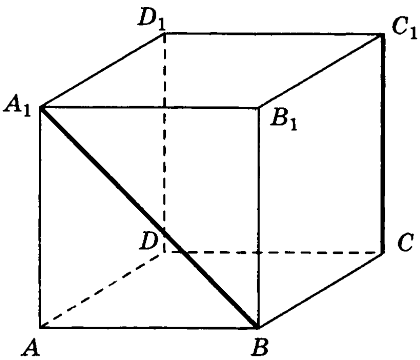


6 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AA_1 и BD_1.

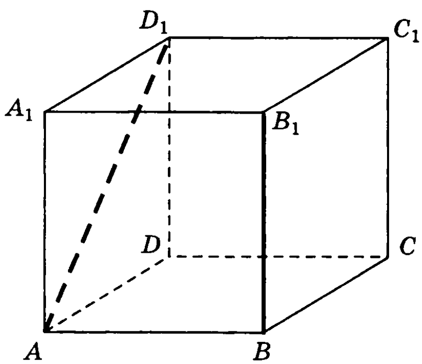


Продолжение табл. 27

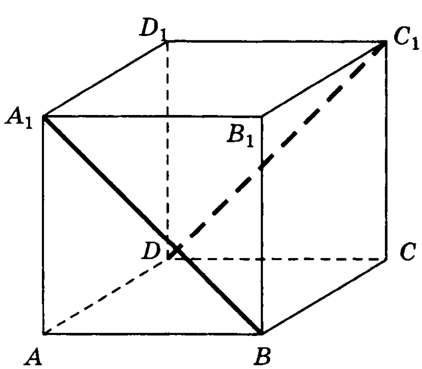
7 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми BA_1 и CC_1.



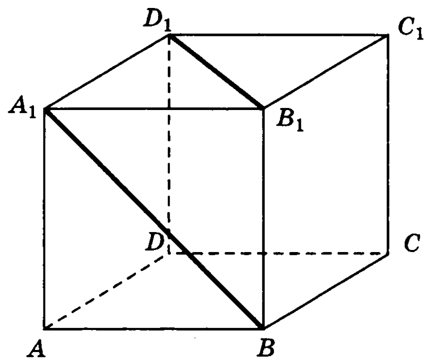
8 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми BB_1 и AD_1.



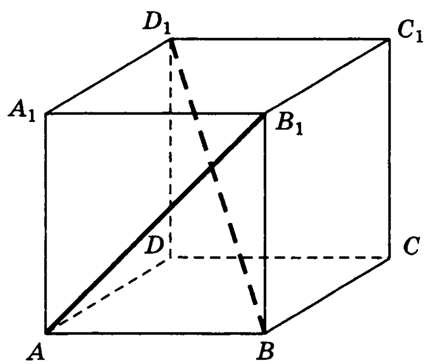
9 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми A_1B и DC_1.



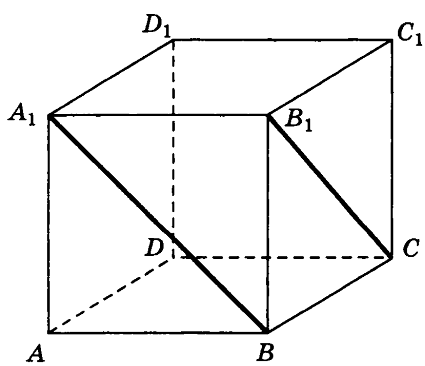
10 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми A_1B и B_1D_1.



11 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и BD_1.

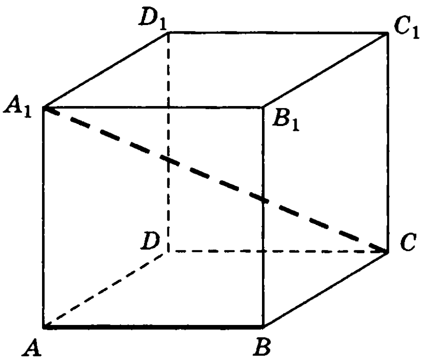


12 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми A_1B и CB_1.

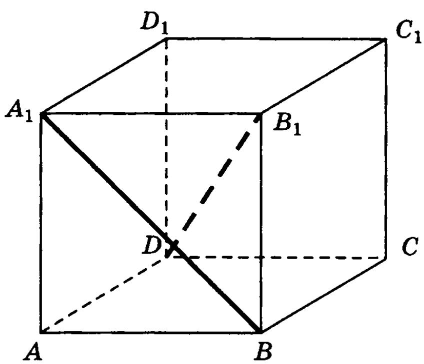


Окончание табл. 27

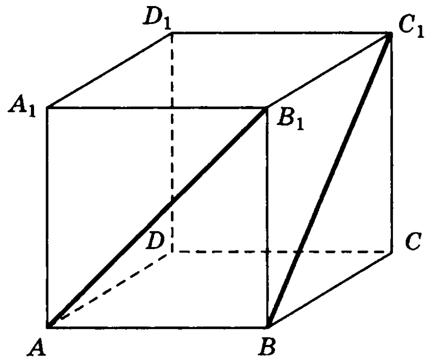
13 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AB и A_1C.



14 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми A_1B и B_1D.



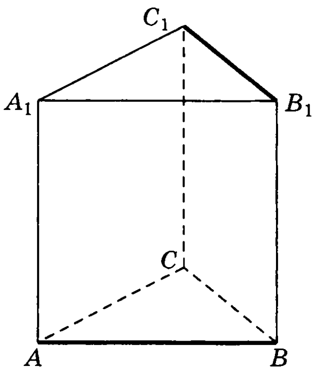
15 В единичном кубе $A...D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.



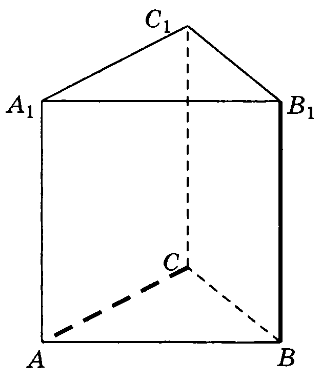
ПРАВИЛЬНАЯ ТРЕУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 28

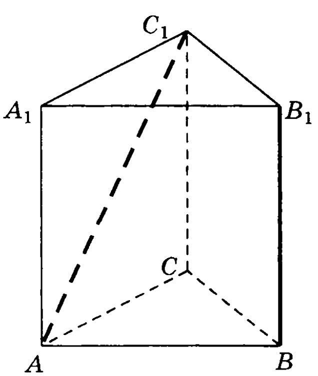
1 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB и B_1C_1.



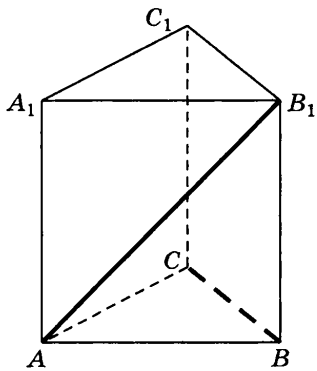
2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и AC.



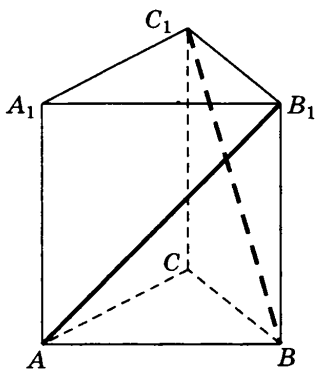
3 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и AC_1.



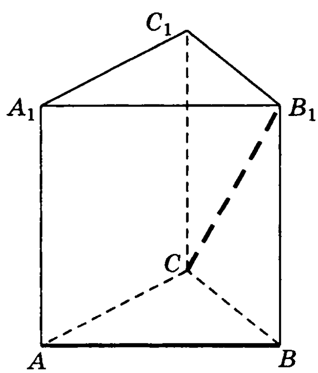
4 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC.



5 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.

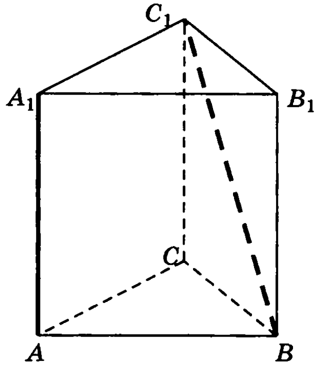


6 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB и CB_1.

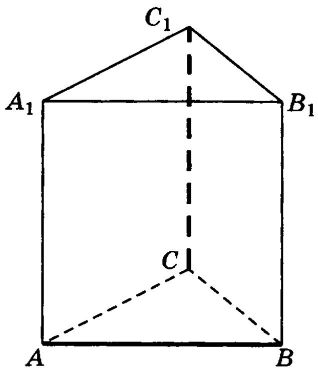


Окончание табл. 28

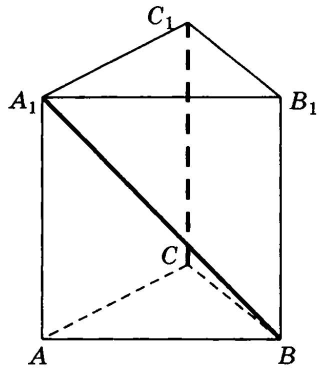
7 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.



8 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB и CC_1.



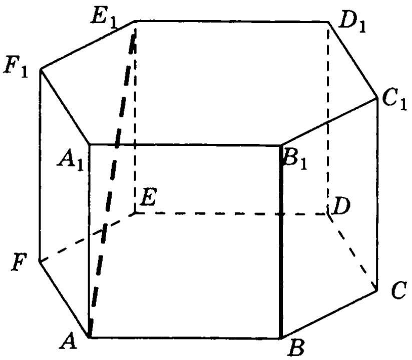
9 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми CC_1 и A_1B.



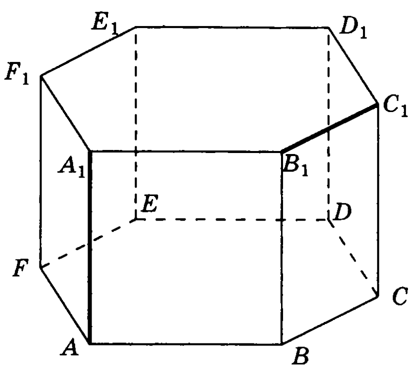
ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 29

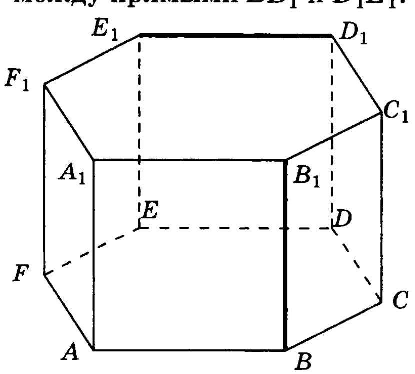
1 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и AE_1.



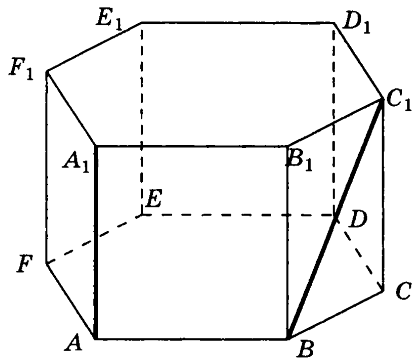
2 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и B_1C_1.



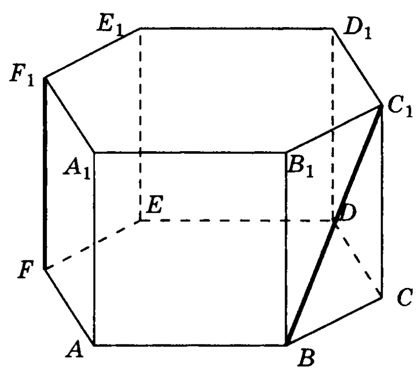
3 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и D_1E_1.



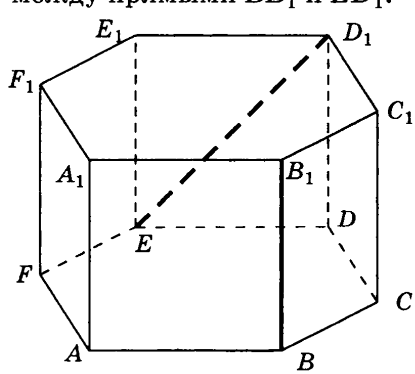
4 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.



5 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми FF_1 и BC_1.

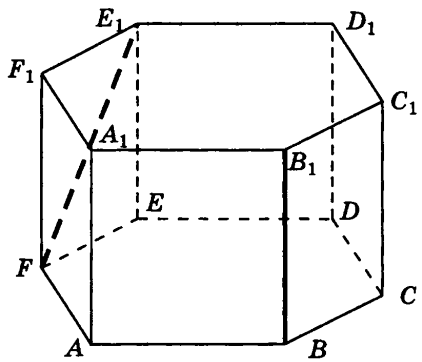


6 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и ED_1.

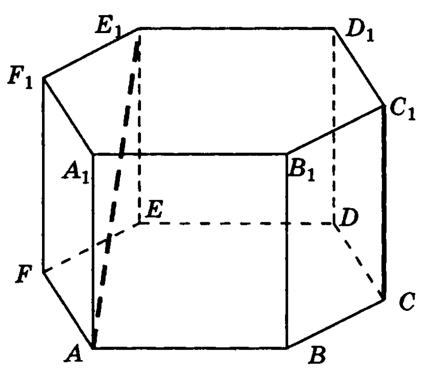


Продолжение табл. 29

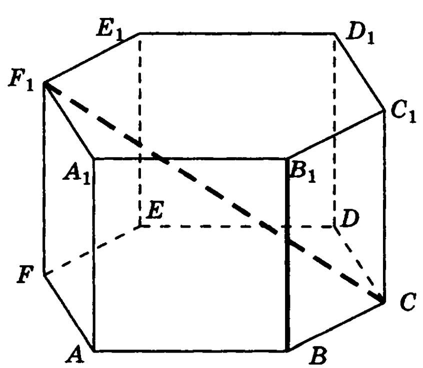
7 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и FE_1.



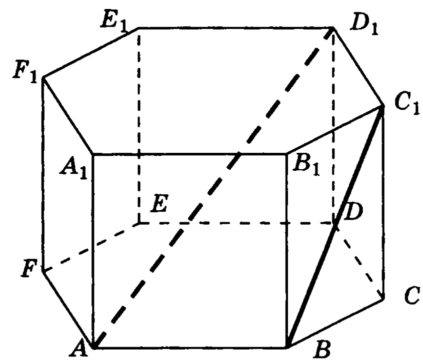
8 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми CC_1 и AE_1.



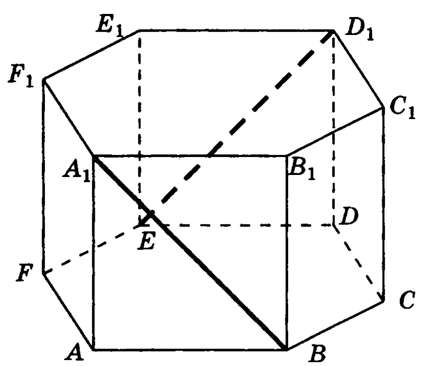
9 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BB_1 и CF_1.



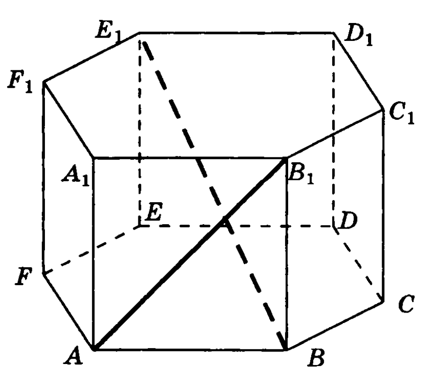
10 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BC_1 и AD_1.



11 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми A_1B и ED_1.

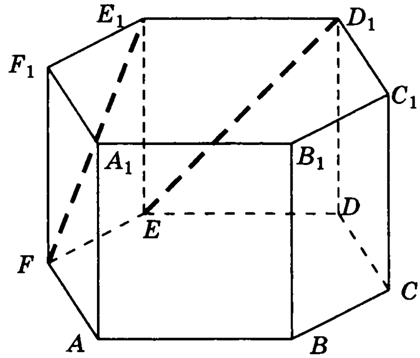


12 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB_1 и BE_1.



Окончание табл. 29

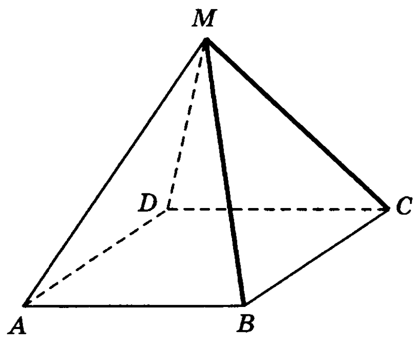
13 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми ED_1 и FE_1.



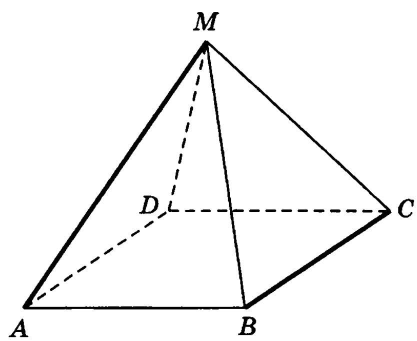
ПРАВИЛЬНАЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 30

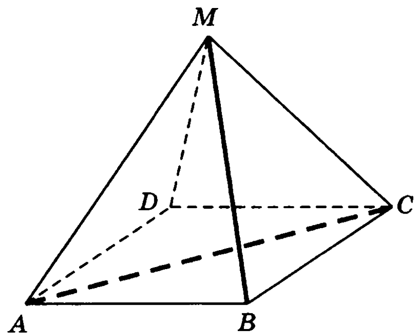
1 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми MB и MC.



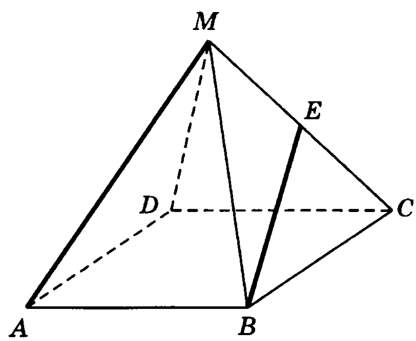
2 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми MA и BC.



3 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми MB и AC.



4 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми MA и BE.

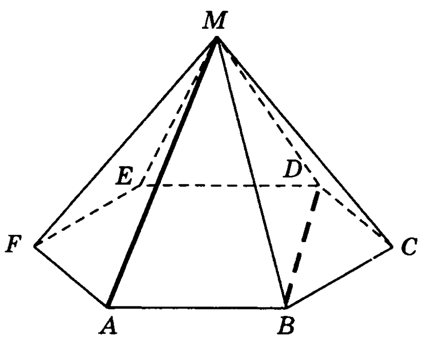


ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 31

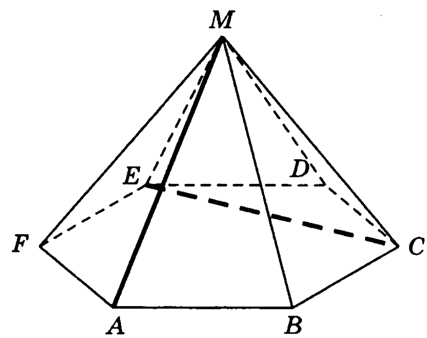
1

В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние между прямыми MA и BD.



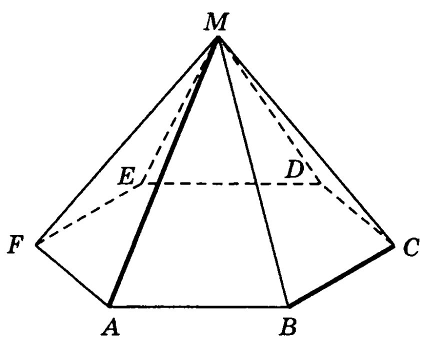
3

В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние между прямыми MA и CE.



2

В правильной шестиугольной пирамиде $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите расстояние между прямыми MA и BC.

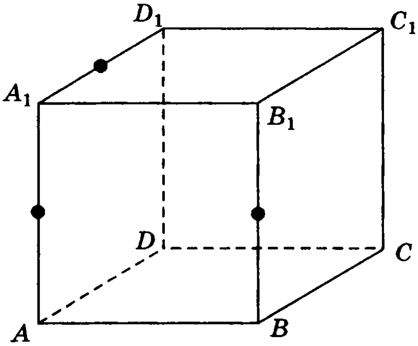


§ 7. Площади сечений многогранников

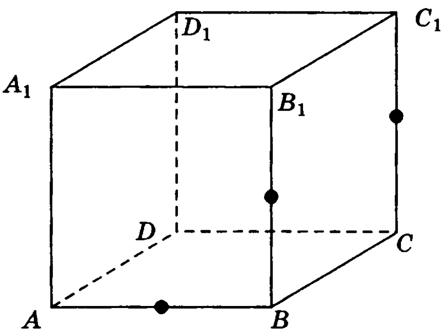
КУБ

Таблица 32

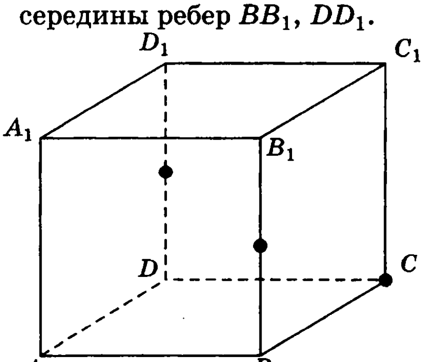
1 Найдите площадь сечения единичного куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AA_1, BB_1, A_1D_1.



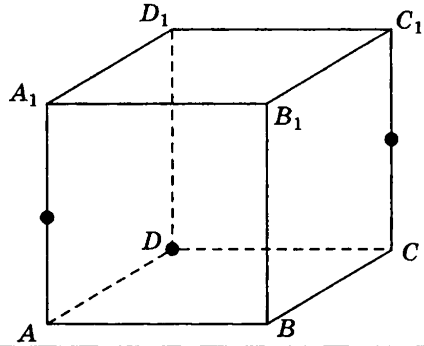
2 Найдите площадь сечения единичного куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер BB_1, CC_1, AB.



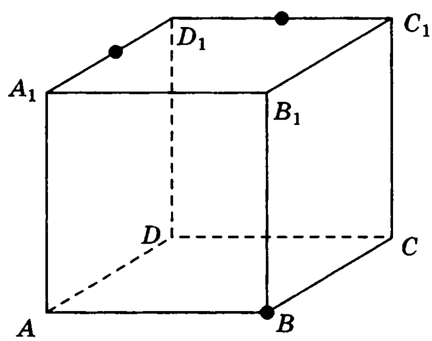
3 Найдите площадь сечения единичного куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершину C и середины ребер BB_1, DD_1.



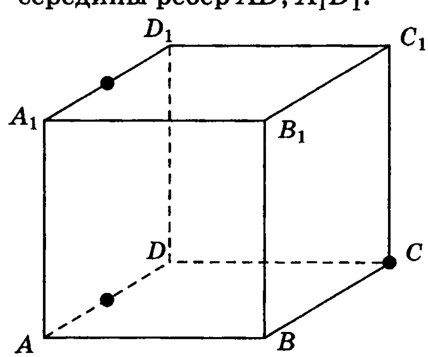
4 Найдите площадь сечения единичного куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершину D и середины ребер AA_1, CC_1.



5 Найдите площадь сечения единичного куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершину B и середины A_1D_1, D_1C_1.

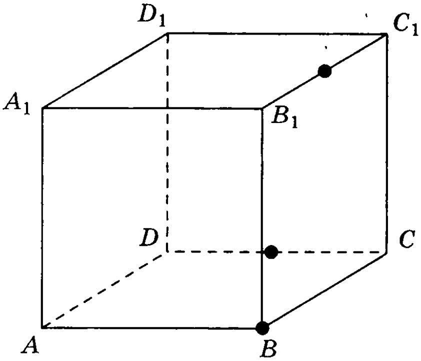


6 Найдите площадь сечения единичного куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершину C и середины ребер AD, A_1D_1.

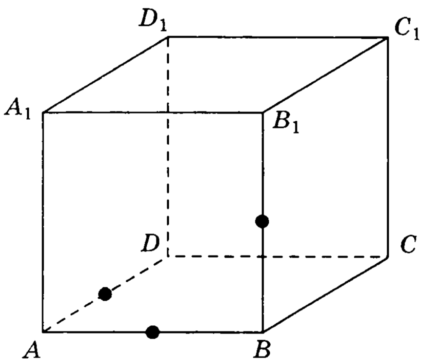


Продолжение табл. 32

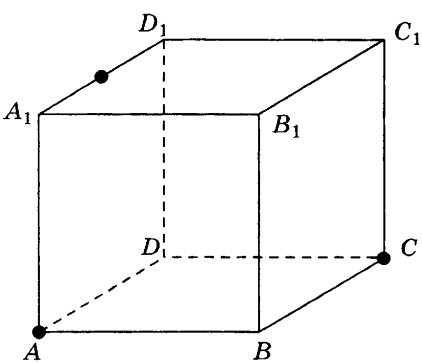
7 Найдите площадь сечения единичного куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершину B и середины CD, B_1C_1.



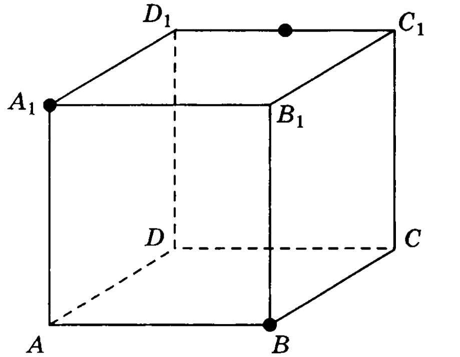
8 Найдите площадь сечения единичного куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AD, AB, BB_1.



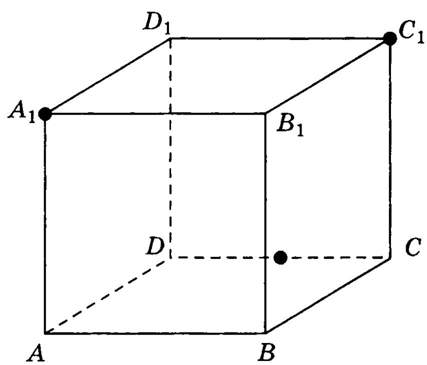
9 Найдите площадь сечения единичного куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершины A, C и середину A_1D_1.



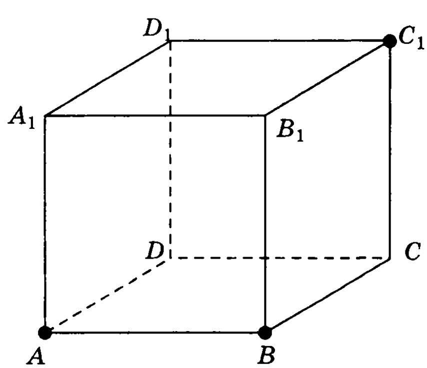
10 Найдите площадь сечения единичного куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершины A_1, B и середину ребра C_1D_1.



11 Найдите площадь сечения единичного куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершины A_1, C_1 и середину ребра DC.

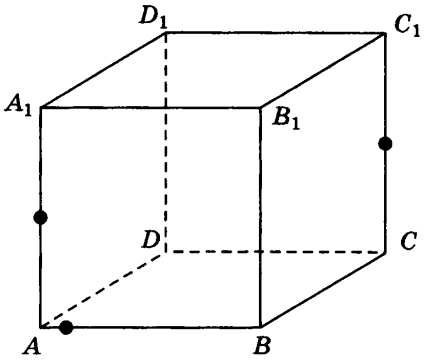


12 Найдите площадь сечения единичного куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершины A, B, C_1.

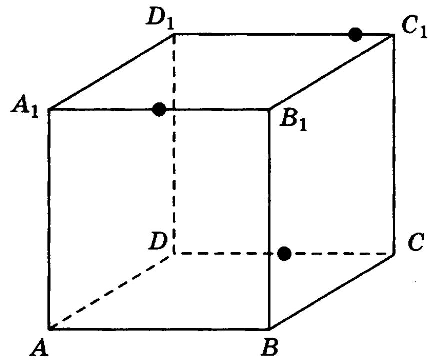


Окончание табл. 32

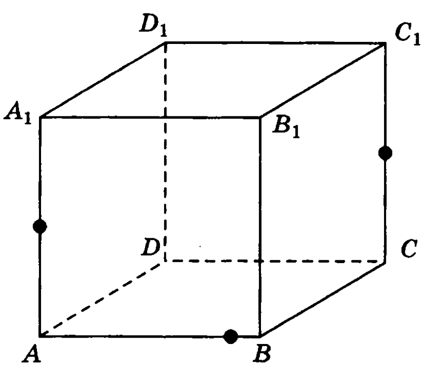
13 Найдите площадь сечения единичного куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через середины AA_1, CC_1 и точку на ребре AB, отстоящую от вершины A на 0,2.



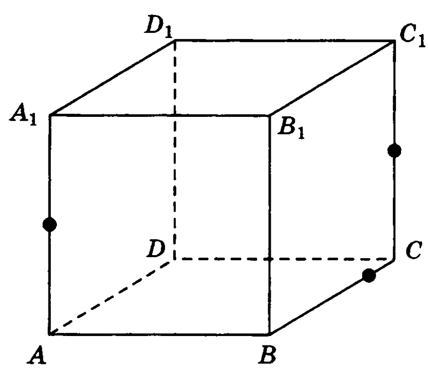
15 Найдите площадь сечения единичного куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер CD, A_1B_1 и точку на ребре C_1D_1, отстоящую от вершины C_1 на 0,25.



14 Найдите площадь сечения единичного куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через середины AA_1, CC_1 и точку на ребре AB, отстоящую от вершины A на 0,8.



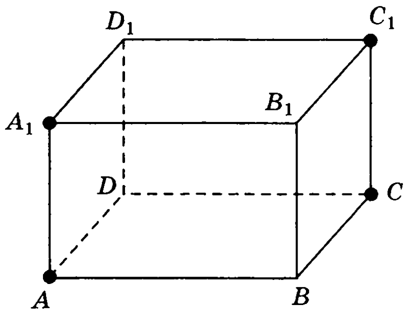
16 Найдите площадь сечения единичного куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AA_1, CC_1 и точку на ребре BC, отстоящую от вершины C на 0,25.



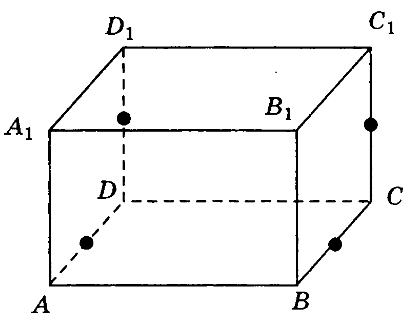
ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Таблица 33

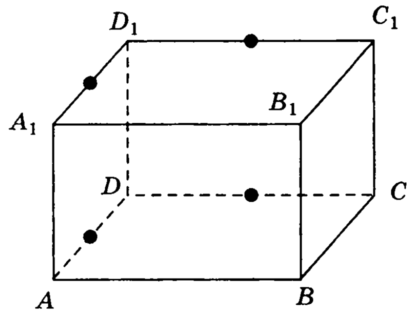
1 Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются вершины A, A_1, C, C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребрами $AB = 2$, $BC = 1$, $AA_1 = 1$.



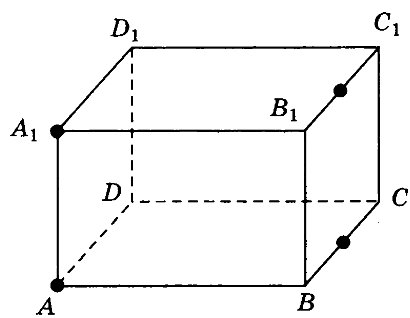
2 Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются середины ребер AD, BC, DD_1, CC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребрами $AB = 2$, $AD = 1$, $AA_1 = 1$.



3 Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются середины ребер AD, A_1D_1, DC, D_1C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребрами $AB = 2$, $AD = 1$, $AA_1 = 1$.



4 Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются вершины A, A_1, середины ребер BC, B_1C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребрами $AB = 2$, $AD = 1$, $AA_1 = 1$.

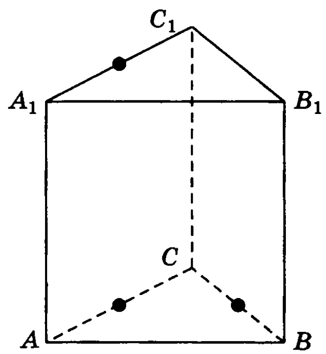


ПРАВИЛЬНАЯ ТРЕУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 34

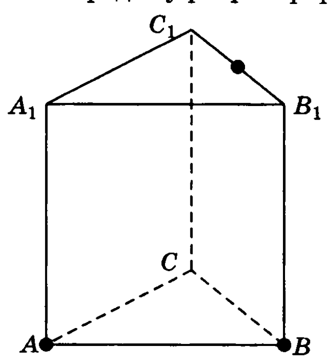
1

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, проходящее через середины ребер AC, BC, A_1C_1.



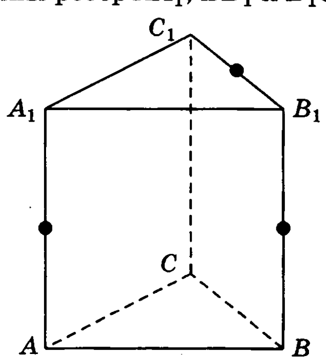
2

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, проходящее через вершины A, B и середину ребра B_1C_1.



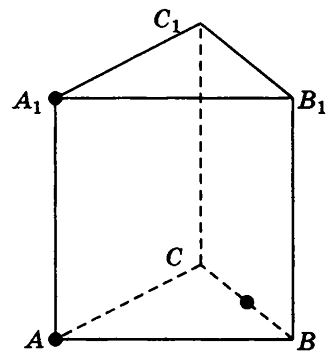
3

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, проходящее через середины ребер AA_1, BB_1 и B_1C_1.



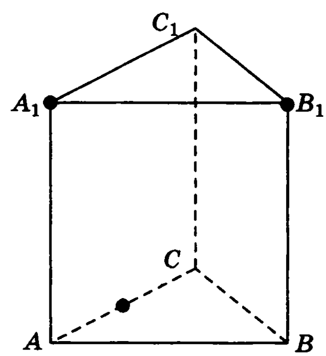
4

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, проходящее через вершины A, A_1 и середину ребра BC.



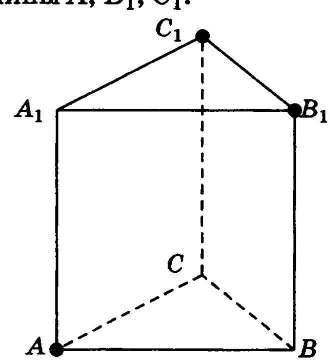
5

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, проходящее через вершины A_1, B_1 и середину ребра AC.



6

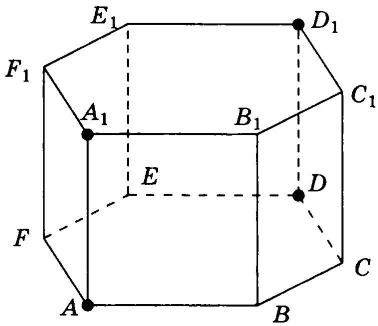
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, проходящее через вершины A, B_1, C_1.



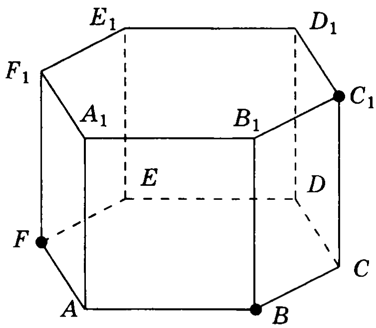
ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 35

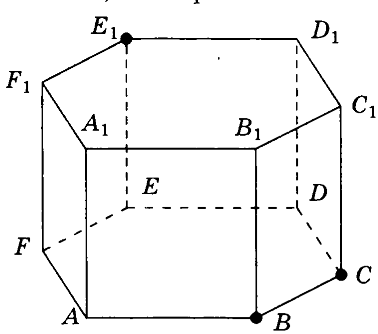
1 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите площадь четырехугольника, проходящего через вершины A, D, A_1, D_1.



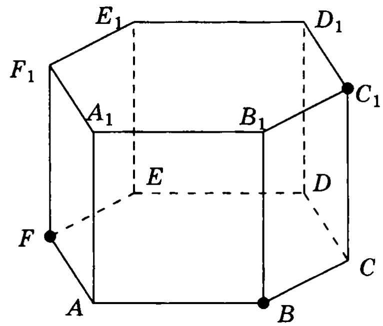
2 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, проходящее через вершины B, F и C_1.



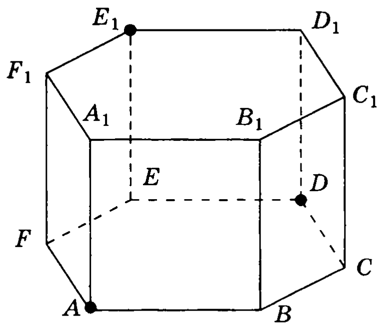
3 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, проходящее через вершины B, C и E_1.



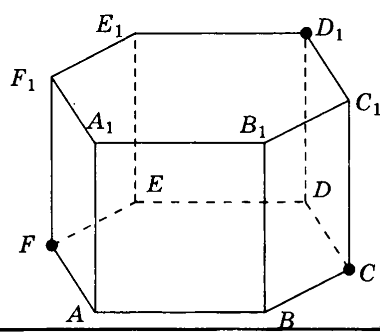
4 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, проходящее через вершины F, B и C_1.



5 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, проходящее через вершины A, D и E_1.



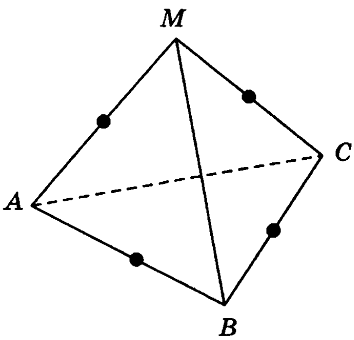
6 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, проходящее через вершины F, C и D_1.



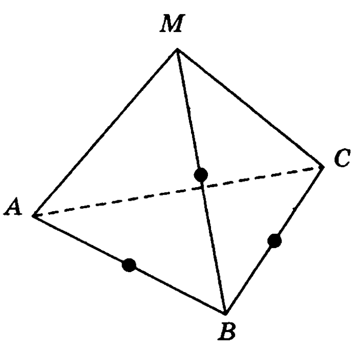
ПРАВИЛЬНЫЙ ТЕТРАЭДР

Таблица 36

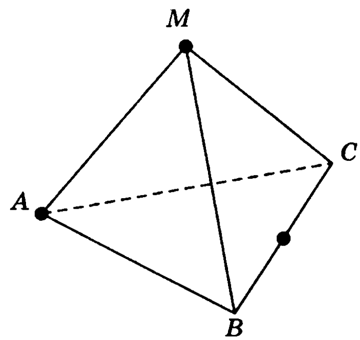
1 В единичном тетраэдре $MABC$ найдите площадь сечения, вершинами которого являются середины ребер AB, BC, CM, AM.



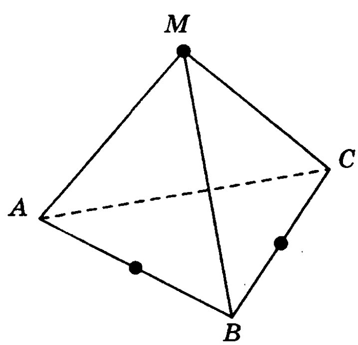
2 В единичном тетраэдре $MABC$ найдите площадь сечения, вершинами которого являются середины ребер AB, BC и BM.



3 В единичном тетраэдре $MABC$ найдите площадь сечения, проходящего через вершины A, M и середину ребра BC.



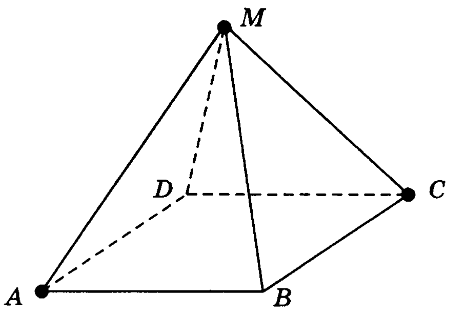
4 В единичном тетраэдре $MABC$ найдите площадь сечения, проходящего через вершину M и середины ребер AB и BC.



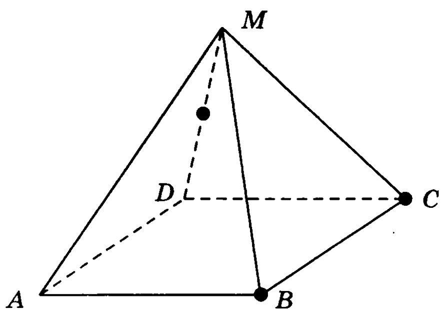
ПРАВИЛЬНАЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 37

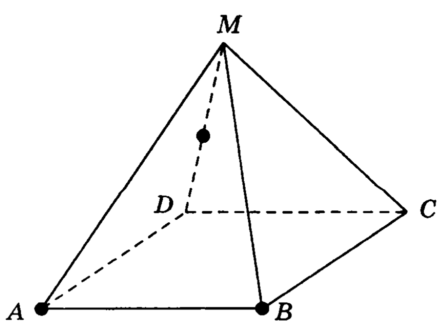
1 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, вершинами которого являются вершины M, A, C.



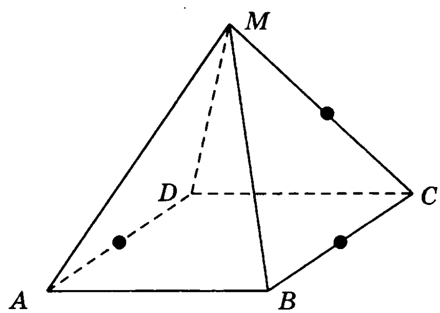
2 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, проходящего через вершины B, C и середину ребра MD.



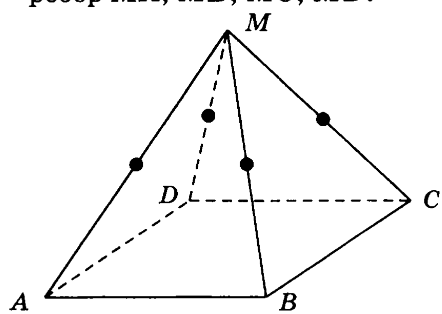
3 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, проходящее через вершины A, B и середину ребра MD.



4 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, проходящее через середины ребер AD, BC и MC.



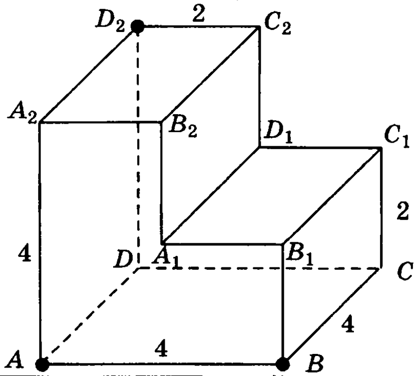
5 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, все ребра которой равны 1, найдите площадь сечения, вершинами которого являются середины ребер MA, MB, MC, MD.



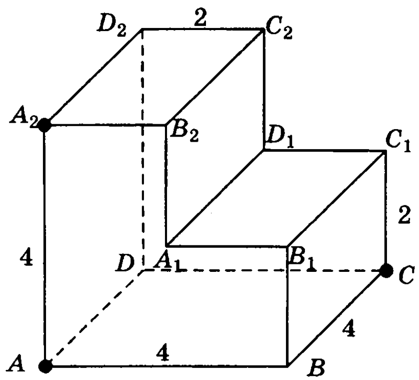
МНОГОГРАННИКИ

Таблица 38

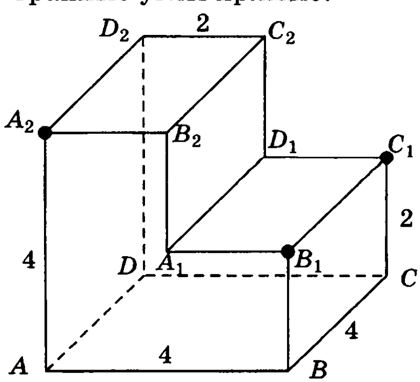
1 Найдите площадь сечения многогранника, проходящее через вершины A, B и D_2. Все двугранные углы прямые.



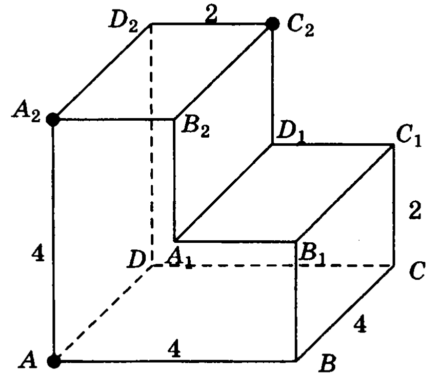
2 Найдите площадь сечения многогранника, проходящее через вершины A, C и A_2. Все двугранные углы прямые.



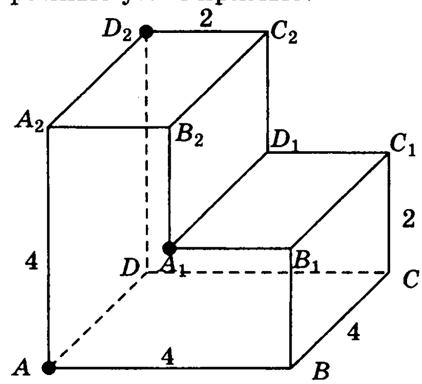
3 Найдите площадь сечения многогранника, проходящее через вершины B_1, C_1 и A_2. Все двугранные углы прямые.



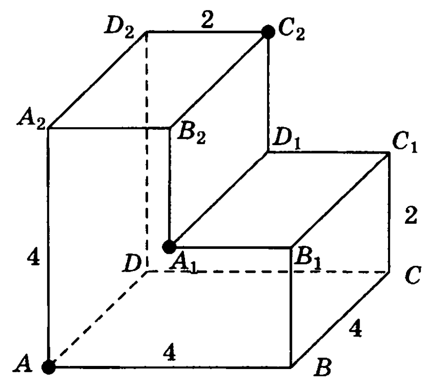
4 Найдите площадь сечения многогранника, проходящее через вершины A, A_2 и C_2. Все двугранные углы прямые.



5 Найдите площадь сечения многогранника, проходящее через вершины A, A_1 и D_2. Все двугранные углы прямые.

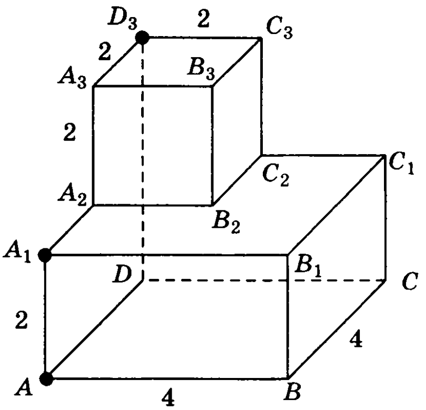


6 Найдите площадь сечения многогранника, проходящее через вершины A, A_1 и C_2. Все двугранные углы прямые.

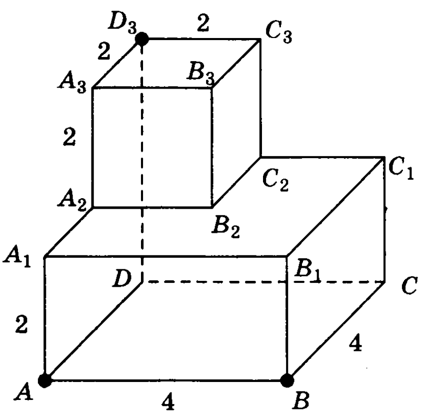


Окончание табл. 38

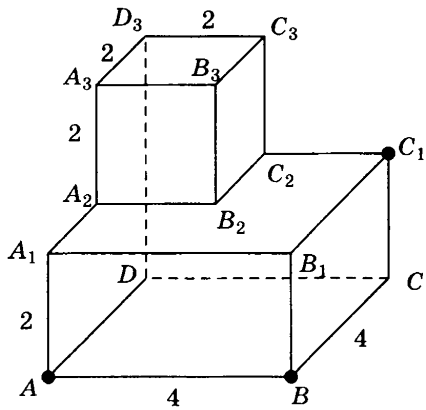
7 Найдите площадь сечения многогранника, проходящее через вершины A, A_1 и D_3. Все двугранные углы многогранника прямые.



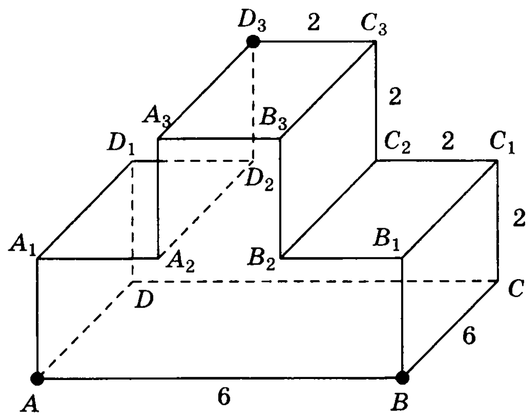
8 Найдите площадь сечения многогранника, проходящее через вершины A, B и D_3. Все двугранные углы многогранника прямые.



9 Найдите площадь сечения многогранника, проходящее через вершины A, B и C_1. Все двугранные углы многогранника прямые.



10 Найдите площадь сечения многогранника, проходящее через вершины A, B и D_3. Все двугранные углы многогранника прямые.

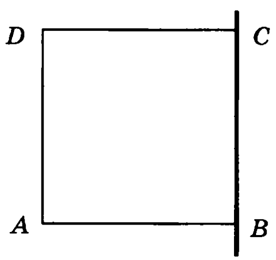


§ 8. Площади поверхностей вращения плоских фигур

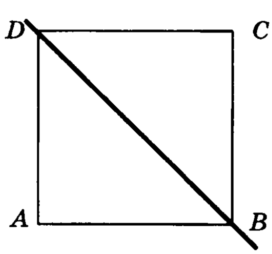
КВАДРАТ

Таблица 39

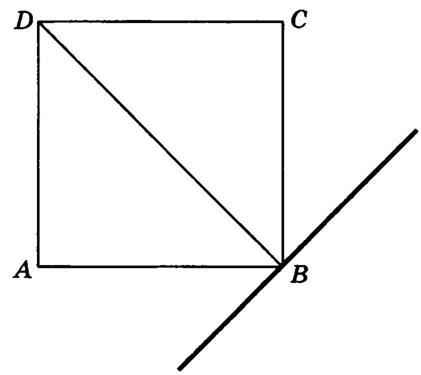
1 Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, полученного вращением единичного квадрата $ABCD$ вокруг прямой BC.



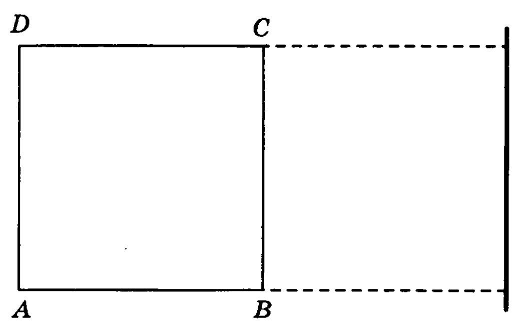
2 Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением единичного квадрата $ABCD$ вокруг прямой BD.



3 Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением единичного квадрата $ABCD$ вокруг перпендикуляра к диагонали, проведенного через ее конец.



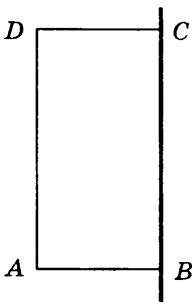
4 Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением единичного квадрата $ABCD$ вокруг внешней оси, параллельной его стороне и отстоящей от нее на длину стороны.



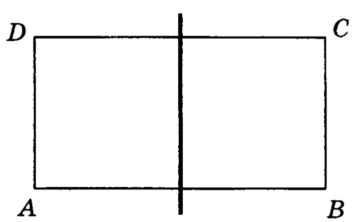
ПРЯМОУГОЛЬНИК

Таблица 40

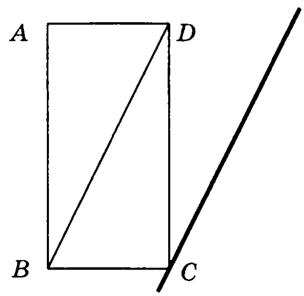
1 Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, полученного вращением прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 1$, $BC = 2$ вокруг прямой BC.



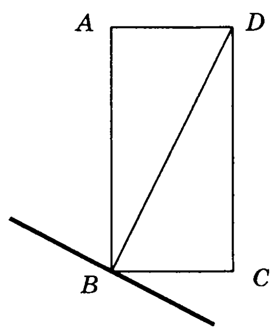
2 Найдите площадь поверхности вращения прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 1$ вокруг прямой, проходящей через середины AB и CD.



3 Найдите площадь поверхности вращения прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 1$ вокруг оси, проходящей через вершину C параллельно диагонали BD.



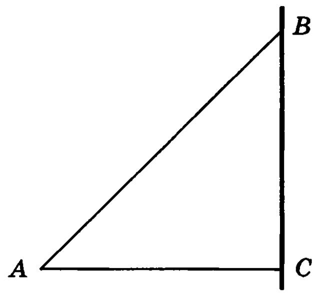
4 Найдите площадь поверхности вращения прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 1$ вокруг перпендикуляра к диагонали BD, проведенного через ее конец B.



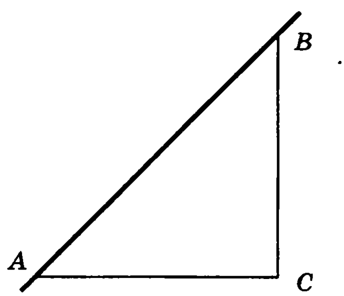
ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Таблица 41

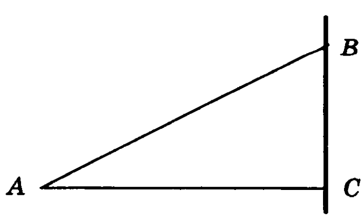
1 Найдите площадь боковой поверхности конуса, полученного вращением прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = BC = 1$ вокруг прямой BC.



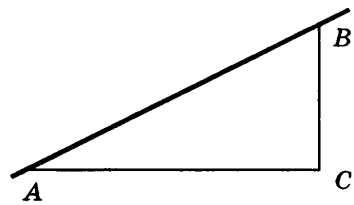
2 Найдите площадь боковой поверхности тела, полученного вращением прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = BC = 1$ вокруг прямой AB.



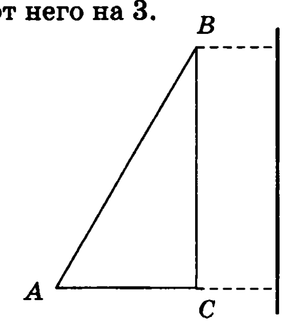
3 Найдите площадь боковой поверхности конуса, полученного вращением прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = 2$, $BC = 1$ вокруг прямой BC.



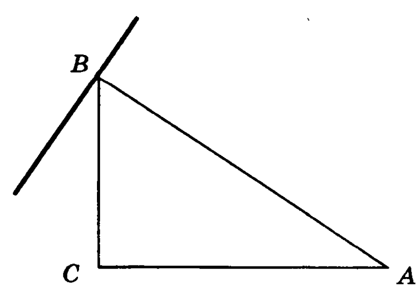
4 Найдите площадь боковой поверхности тела, полученного вращением прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = 2$, $BC = 1$ вокруг прямой AB.



5 Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением прямоугольного треугольника ABC с катетами 5 и 12 вокруг внешней оси, параллельной большему катету и отстоящему от него на 3.



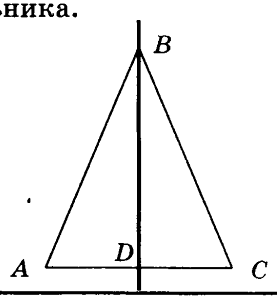
6 Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением прямоугольного треугольника ABC с катетами 15 и 20 вокруг перпендикуляра к гипотенузе, проведенного через вершину большего острого угла B.



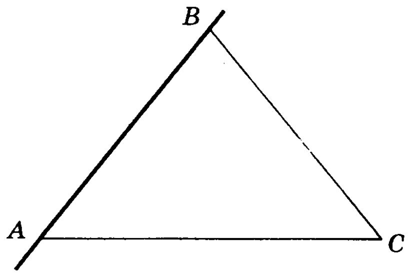
РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Таблица 42

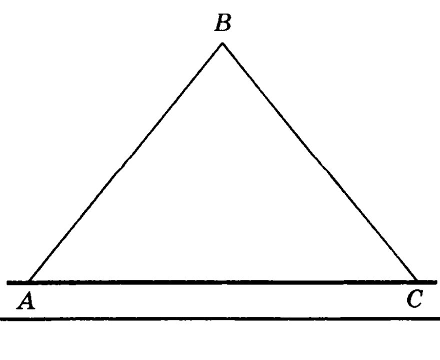
1 Найдите площадь полной поверхности конуса, полученного вращением равнобедренного треугольника ABC с основанием $AC = 4$ и боковой стороной, равной 5, вокруг прямой, содержащей высоту BD этого треугольника.



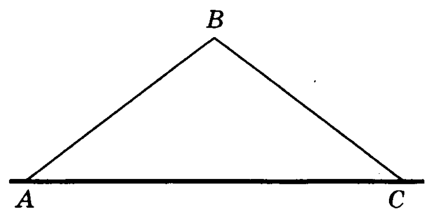
2 Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением равнобедренного треугольника ABC с основанием $AC = 6$ и боковой стороной, равной 5, вокруг прямой AB.



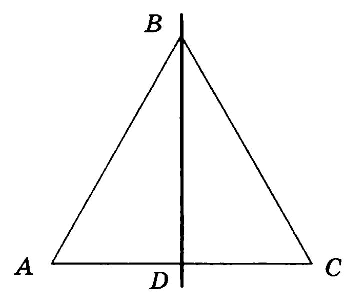
3 Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением равнобедренного треугольника ABC с основанием $AC = 6$ и боковой стороной, равной 5, вокруг прямой AC.



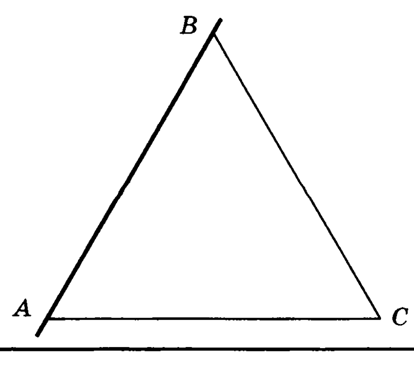
4 Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением равнобедренного треугольника ABC, у которого боковые стороны равны по 5, а один из углов $120°$, вокруг основания AC.



5 Найдите площадь полной поверхности конуса, полученного вращением равностороннего треугольника ABC со стороной 1 вокруг прямой, содержащей медиану BD.



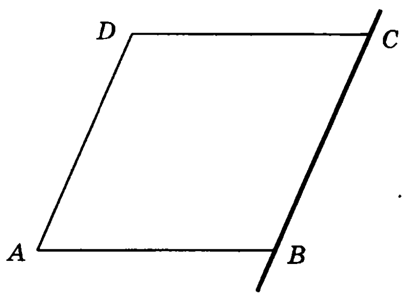
6 Найдите площадь поверхности вращения равностороннего треугольника ABC со стороной 1 вокруг прямой AB.



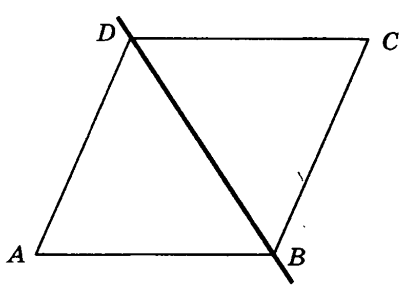
РОМБ

Таблица 43

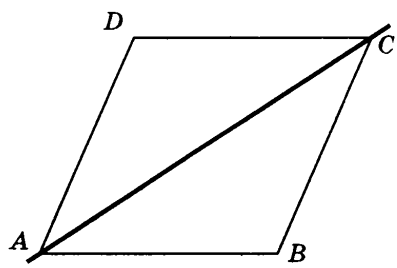
1 Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением ромба $ABCD$ с площадью, равной 1, вокруг стороны BC.



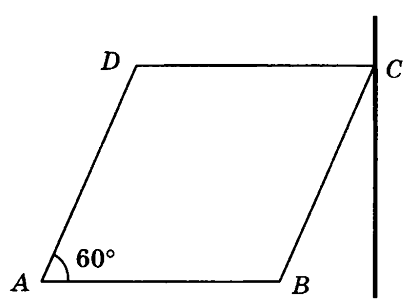
2 Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением ромба $ABCD$ со сторонами, равными 1, и острым углом 60°, вокруг прямой BD.



3 Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением ромба $ABCD$ со сторонами, равными 1, и острым углом 60°, вокруг прямой AC.



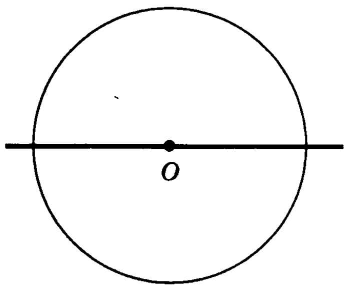
4 Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением ромба $ABCD$ со сторонами, равными 1, и острым углом в 60°, вокруг оси, проведенной через вершину C перпендикулярно к стороне DC.



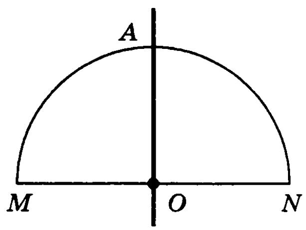
КРУГ И ЕГО ЧАСТИ

Таблица 44

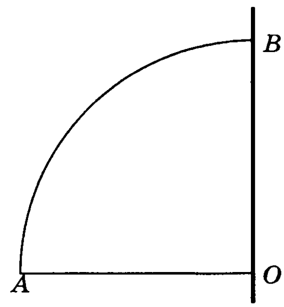
1 Найдите площадь поверхности вращения круга радиуса 1 вокруг прямой, содержащей его диаметр.



2 Найдите площадь поверхности вращения полукруга радиуса 1 вокруг прямой OA, перпендикулярной диаметру MN.



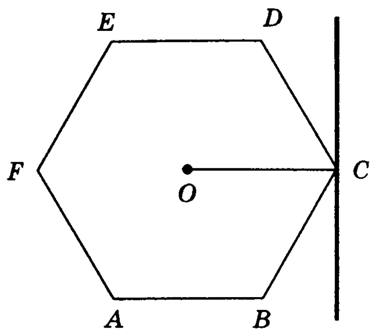
3 Найдите площадь поверхности вращения четверти круга радиуса 1 вокруг прямой OB.



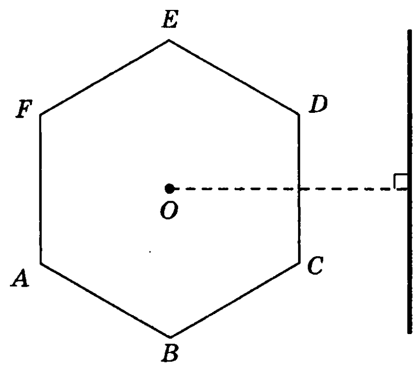
ПРАВИЛЬНЫЙ ШЕСТИУГОЛЬНИК

Таблица 45

1 Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной, равной 1, вокруг оси, проходящей через его вершину C перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту вершину.



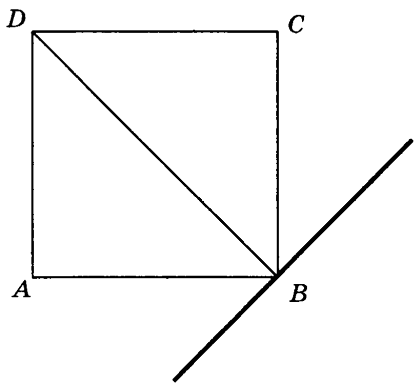
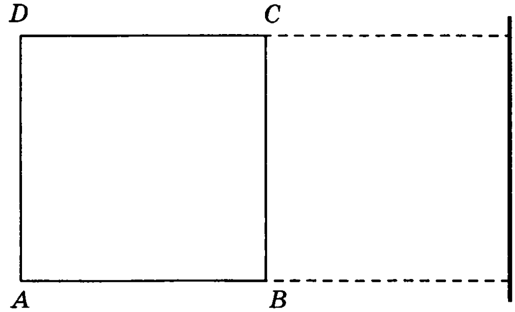
2 Найдите площадь поверхности тела, полученного вращением правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной, равной 1, вокруг внешней оси, которая параллельна стороне и отстоит от нее на длину апофемы.



§ 9. Объемы тел вращения плоских фигур

КВАДРАТ

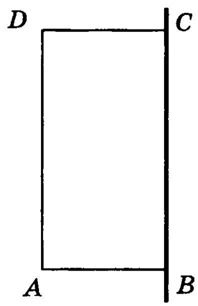
Таблица 46

1 Найдите объем тела, полученного вращением единичного квадрата $ABCD$ вокруг перпендикуляра к диагонали, проведенного через ее конец. 	**2** Найдите объем тела, полученного вращением единичного квадрата $ABCD$ вокруг внешней оси, параллельной его стороне и отстоящей от нее на длину стороны. 

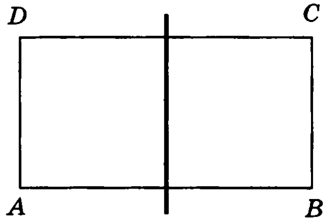
ПРЯМОУГОЛЬНИК

Таблица 47

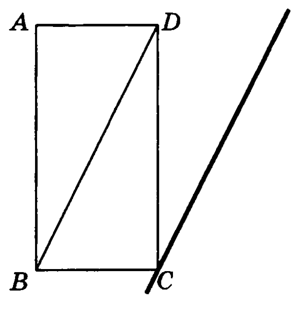
1 Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 1$, $BC = 2$ вокруг прямой BC.



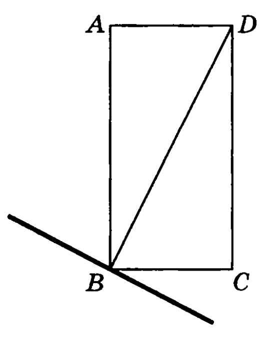
2 Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 1$ вокруг прямой, проходящей через середины AB и CD.



3 Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 1$ вокруг оси, проходящей через вершину C параллельно диагонали BD.



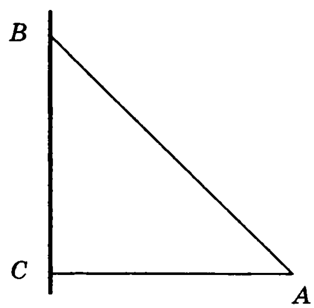
4 Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = 2$, $BC = 1$ вокруг перпендикуляра к диагонали BD, проведенного через ее конец.



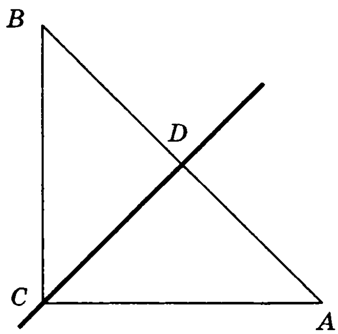
ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Таблица 48

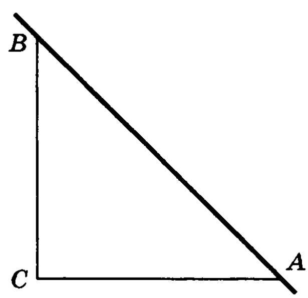
1 Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = BC = 1$ вокруг прямой BC.



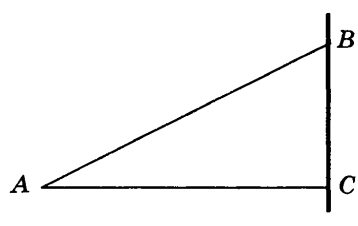
3 Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = BC = 1$ вокруг прямой CD, где D — середина AB.



2 Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = BC = 1$ вокруг прямой AB.

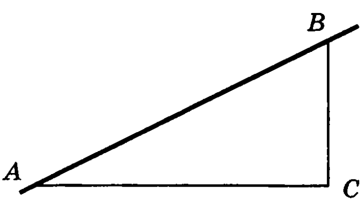


4 Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = 2$, $BC = 1$ вокруг прямой BC.

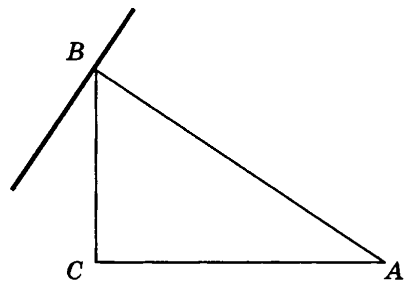


Окончание табл. 48

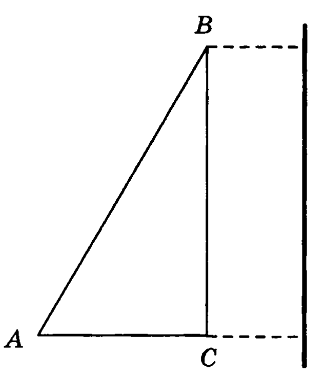
5 Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = 2$, $BC = 1$ вокруг прямой AB.



7 Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольного треугольника ABC с катетами 15 и 20 вокруг перпендикуляра к гипотенузе, проведенного через вершину большего острого угла B.



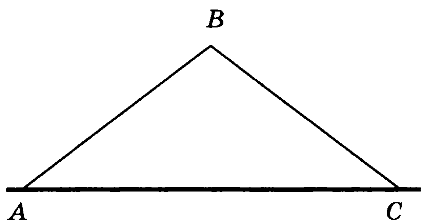
6 Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольного треугольника ABC с катетами 5 и 12 вокруг внешней оси, параллельной большему катету и отстоящему от него на 3.



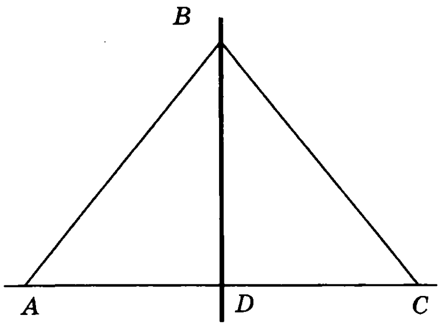
РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Таблица 49

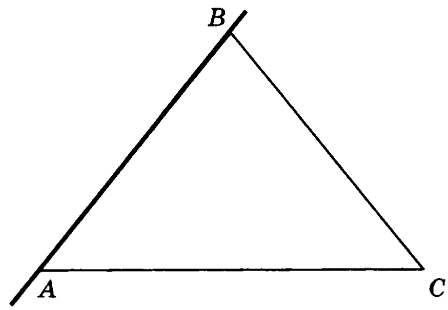
1 Найдите объем тела, полученного вращением равнобедренного треугольника ABC, $AB = BC = 1$, $\angle B = 120°$, вокруг прямой AC.



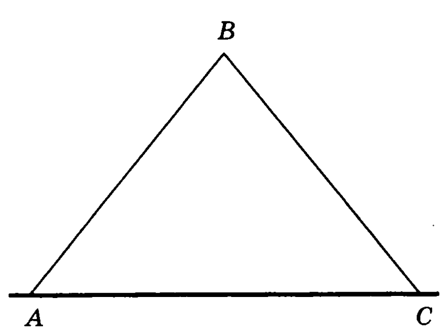
2 Найдите объем тела, полученного вращением равнобедренного треугольника ABC со сторонами $AB = BC = 5$, $AC = 6$ вокруг прямой, содержащей биссектрису BD этого треугольника.



3 Найдите объем тела, полученного вращением равнобедренного треугольника ABC со сторонами $AB = BC = 5$, $AC = 6$ вокруг прямой AB.

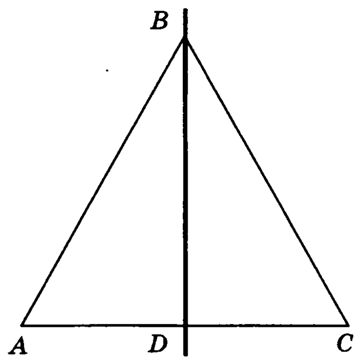


4 Найдите объем тела, полученного вращением равнобедренного треугольника ABC со сторонами $AB = BC = 5$, $AC = 6$ вокруг прямой AC.

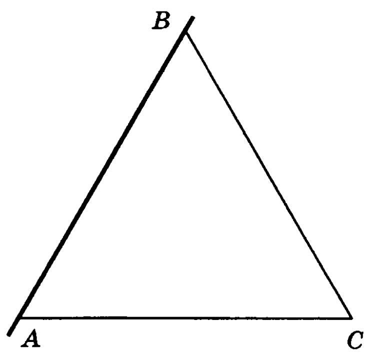


Окончание табл. 49

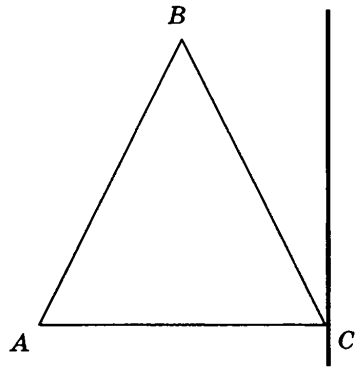
5 Найдите объем тела, полученного вращением равностороннего треугольника ABC со стороной 1 вокруг прямой, содержащей высоту BD.



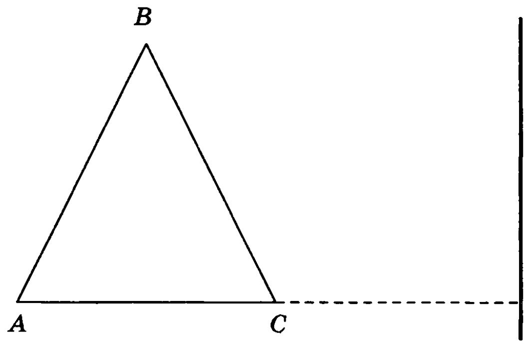
6 Найдите объем тела, полученного вращением равностороннего треугольника ABC со стороной 1 вокруг прямой AB.



7 Найдите объем тела, полученного вращением равностороннего треугольника ABC со стороной 1 вокруг перпендикуляра к стороне, проведенного через ее конец.



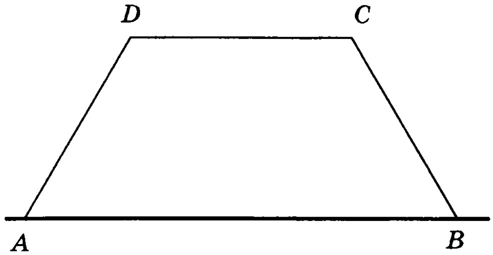
8 Найдите объем тела, полученного вращением равностороннего треугольника ABC со стороной 1 вокруг перпендикуляра к прямой, отстоящей от продолжения AC на длину 1.



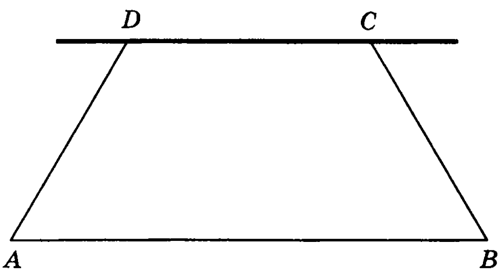
ТРАПЕЦИЯ

Таблица 50

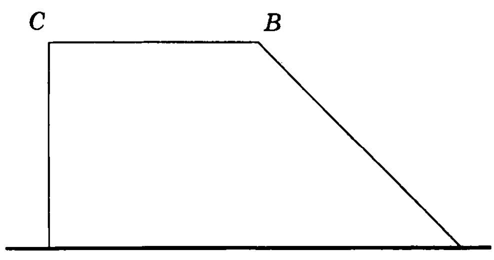
1 Найдите объем тела, полученного вращением трапеции $ABCD$, у которой $AD = DC = BC = 1$, $AB = 2$ вокруг прямой AB.



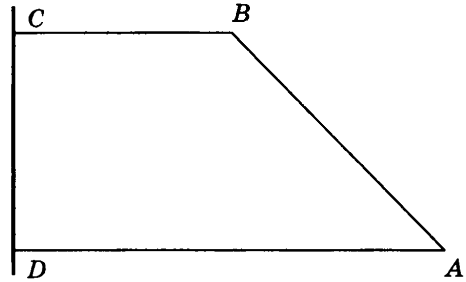
2 Найдите объем тела, полученного вращением трапеции $ABCD$, у которой $AD = DC = BC = 1$, $AB = 2$ вокруг прямой CD.



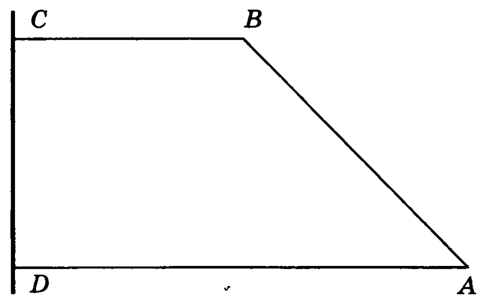
3 Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 2$, $BC = 1$ и меньшей боковой стороной $CD = 1$, вокруг прямой AD.



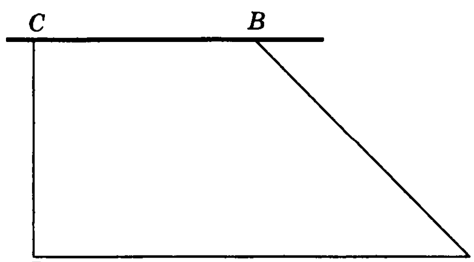
4 Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 2$, $BC = 1$ и меньшей боковой стороной $CD = 1$, вокруг прямой CD.



5 Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 2$, $BC = 1$ и острым углом в 45°, вокруг прямой CD.



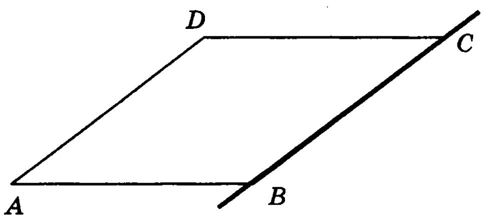
6 Найдите объем тела, полученного вращением прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 2$, $BC = 1$ и меньшей боковой стороной $CD = 1$, вокруг прямой BC.



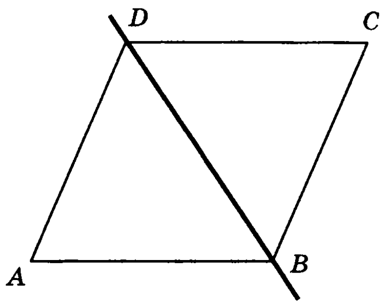
РОМБ

Таблица 51

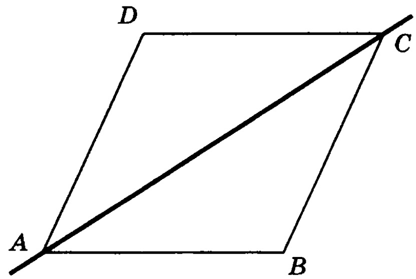
1 Найдите объем тела, полученного вращением ромба $ABCD$ со сторонами, равными 1, и острым углом 30°, вокруг стороны BC.



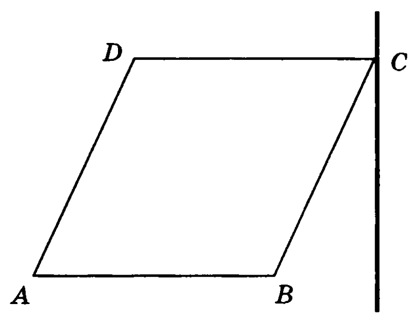
2 Найдите объем тела, полученного вращением ромба $ABCD$ со сторонами, равными 1, и острым углом 60°, вокруг прямой, содержащей меньшую диагональ BD.



3 Найдите объем тела, полученного вращением ромба $ABCD$ со сторонами, равными 1, и острым углом в 60°, вокруг прямой, содержащей большую диагональ AC.



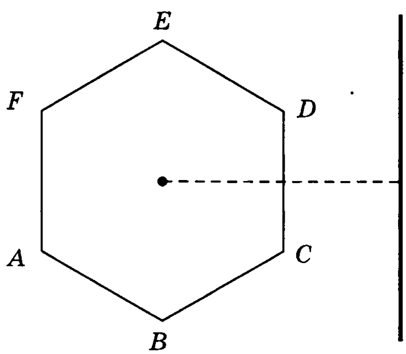
4 Найдите объем тела, полученного вращением ромба $ABCD$ со сторонами, равными 1, и острым углом в 60°, вокруг оси, проведенной через вершину C перпендикулярно к стороне DC.



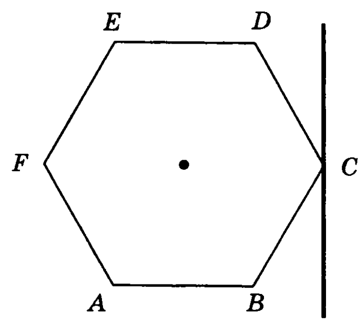
ПРАВИЛЬНЫЙ ШЕСТИУГОЛЬНИК

Таблица 52

1 Найдите объем тела, полученного вращением правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной, равной 1, вокруг внешней оси, которая параллельна стороне и отстоит от нее на длину апофемы.



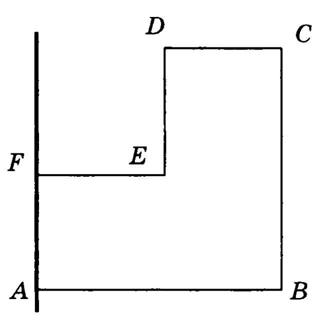
2 Найдите объем тела, полученного вращением правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной, равной 1, вокруг оси, проходящей через его вершину C перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту вершину.



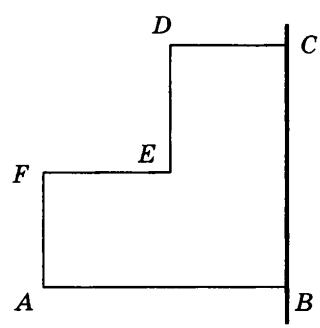
МНОГОУГОЛЬНИК

Таблица 53

1 Найдите объем тела, полученного вращением многоугольника $ABCDEF$, составленного из трех единичных квадратов, вокруг прямой AF.

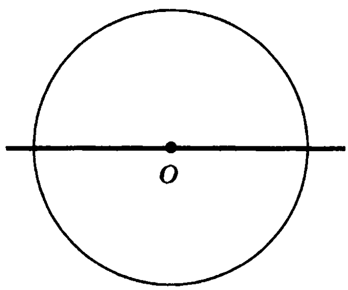
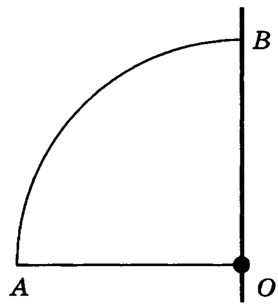
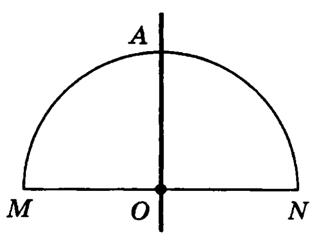


2 Найдите объем тела, полученного вращением многоугольника $ABCDEF$, составленного из трех единичных квадратов, вокруг прямой BC.



КРУГ И ЕГО ЧАСТИ

Таблица 54

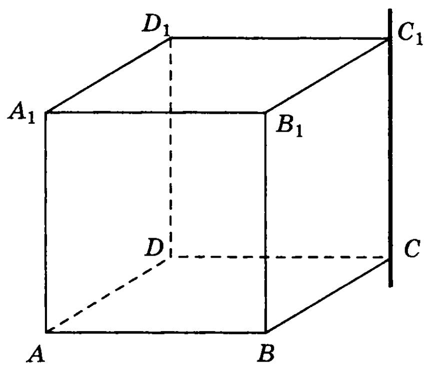
1 Найдите объем тела, полученного вращением круга радиуса 1 вокруг прямой, содержащей его диаметр. 	**3** Найдите объем тела, полученного вращением четверти круга радиуса 1 вокруг прямой OB. 
2 Найдите объем тела, полученного вращением полукруга радиуса 1 вокруг прямой OA, перпендикулярной диаметру MN. 	

§ 10. Объемы тел вращения многогранников

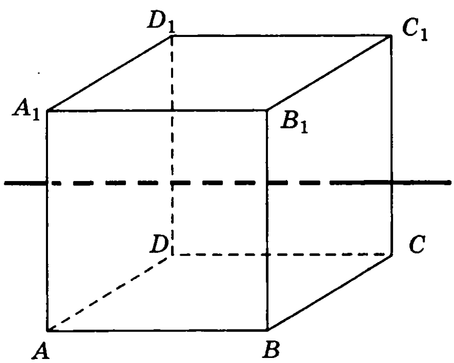
КУБ

Таблица 55

1 Найдите объем тела, полученного вращением единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, вокруг прямой CC_1.



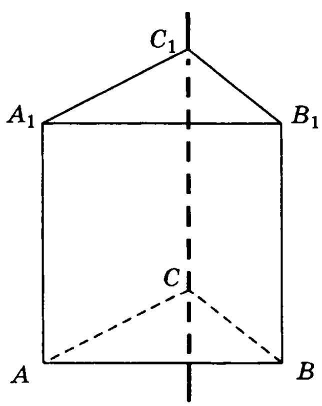
2 Найдите объем тела, полученного вращением единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, вокруг прямой, проходящей через центры граней ADD_1A_1 и BCC_1B_1.



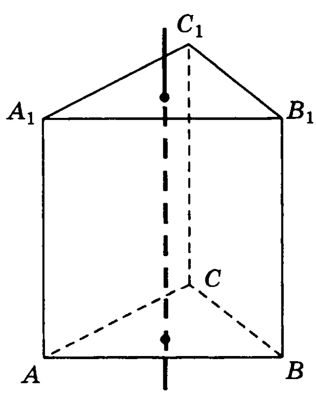
ПРАВИЛЬНАЯ ТРЕУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 56

1 Найдите объем тела, полученного вращением правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, вокруг прямой CC_1.



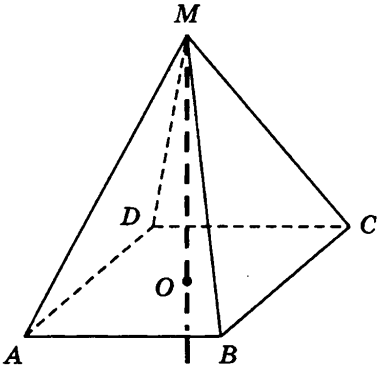
2 Найдите объем тела, полученного вращением правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, вокруг прямой, проходящей через центры оснований ABC и $A_1B_1C_1$.



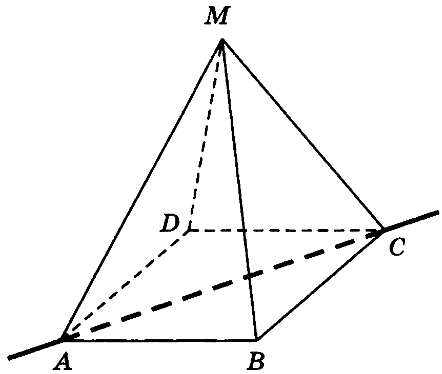
ПРАВИЛЬНАЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 57

1 Найдите объем тела, полученного вращением правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$, все ребра которой равны 1, вокруг прямой, содержащей высоту MO пирамиды.



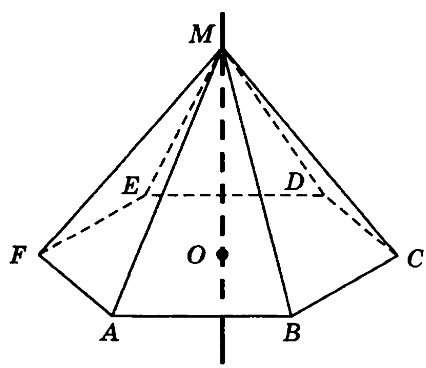
2 Найдите объем тела, полученного вращением правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$, все ребра которой равны 1, вокруг прямой, содержащей диагональ основания AC.



ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 58

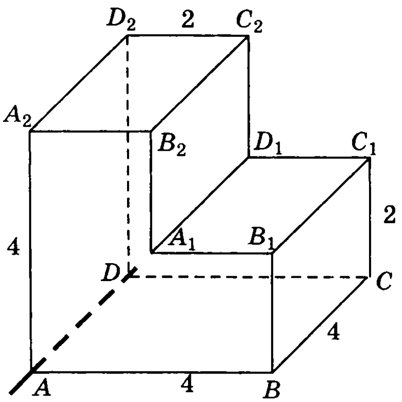
1 Найдите объем тела, полученного вращением правильной шестиугольной пирамиды $MABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, вокруг прямой, содержащей высоту MO.



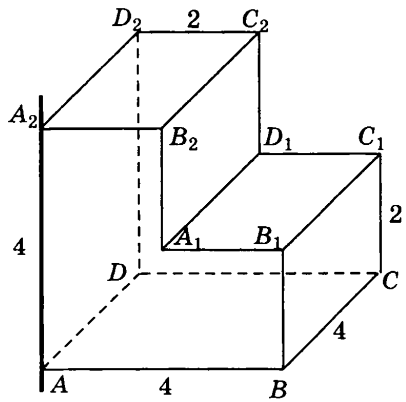
МНОГОГРАННИКИ

Таблица 59

1 Найдите объем тела, полученного вращением многогранника вокруг прямой AD. Все двугранные углы прямые.



2 Найдите объем тела, полученного вращением многогранника вокруг прямой AA_2. Все двугранные углы прямые.



Раздел III

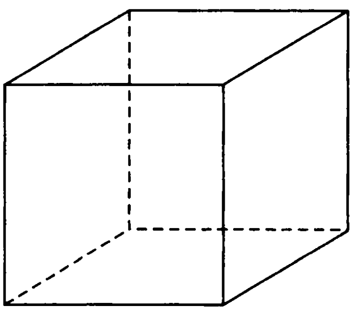
РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

§ 11. Многогранники

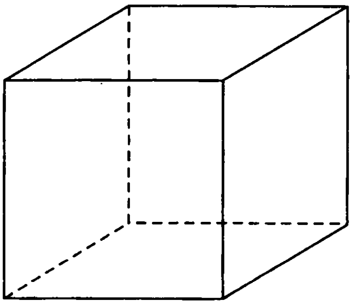
КУБ

Таблица 60

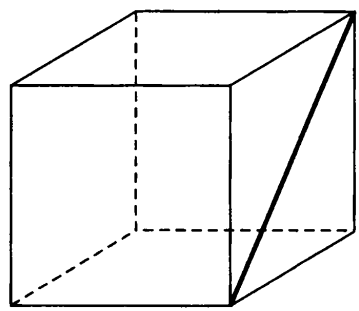
1 Площадь поверхности куба равна 150. Найдите его объем.



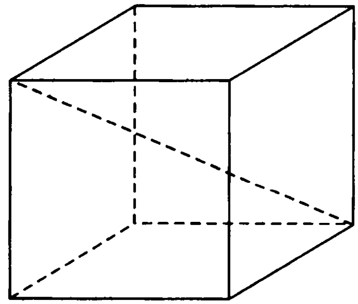
2 Площадь поверхности куба равна 96. Найдите ребро куба.



3 Площадь полной поверхности куба равна 48. Найдите длину диагонали грани куба.

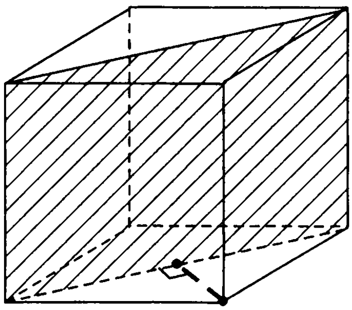


4 Диагональ куба равна 18. Найдите площадь его одной грани.

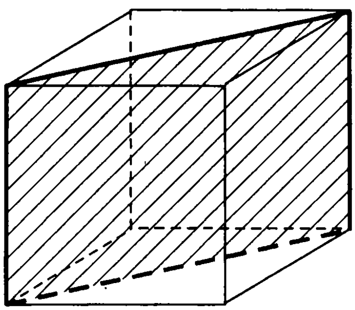


Продолжение табл. 60

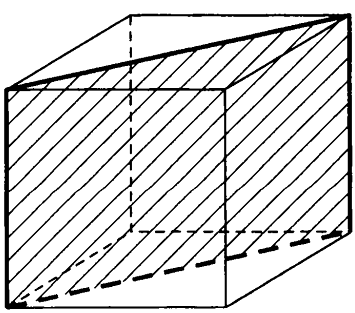
5 Ребро куба равно $5\sqrt{2}$. Найдите расстояние от плоскости диагонального сечения до непересекающего его ребра.



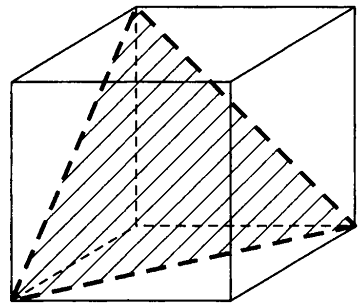
6 Найдите площадь диагонального сечения куба, объем которого равен $4\sqrt[4]{2}$.



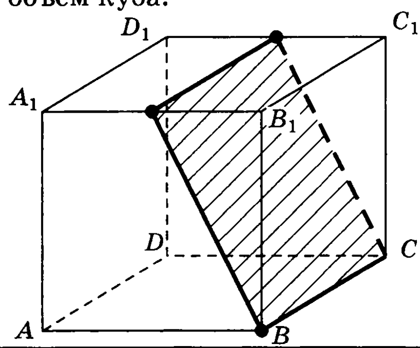
7 Площадь сечения куба плоскостью, проходящей через диагонали верхнего и нижнего оснований, равна $16\sqrt{2}$. Найдите длину ребра куба.



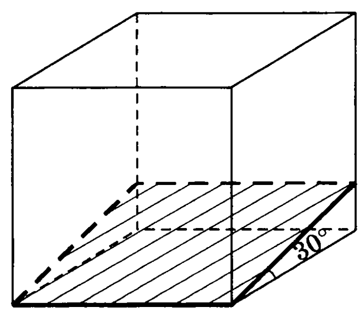
8 Площадь сечения куба плоскостью, проходящей через три несмежные вершины, равна $18\sqrt{3}$. Найдите длину ребра куба.



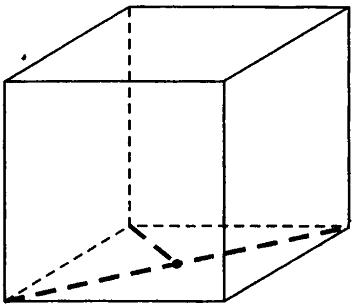
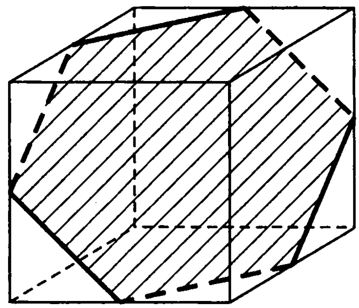
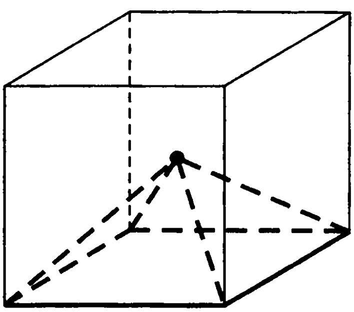
9 В кубе $A...D_1$ через середины ребер A_1B_1, D_1C_1 и вершину B проведено сечение, площадь которого равна $32\sqrt{5}$. Найдите объем куба.



10 В кубе через сторону основания проведено сечение под углом 30° к плоскости основания. Найдите площадь сечения, если ребро куба равно $7\sqrt[4]{3}$.



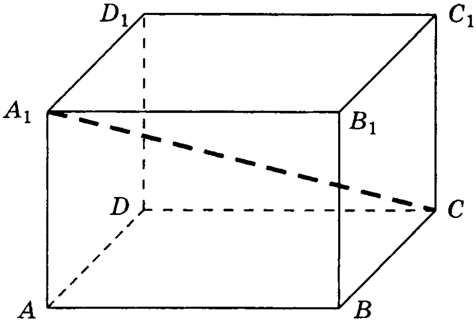
Окончание табл. 60

11 Найдите объем куба, если расстояние от его диагонали до непересекающегося с ней ребра равно 1. 	**13** Сечение куба плоскостью представляет собой правильный шестиугольник, площадь которого равна 1. Найдите полную поверхность куба. 
12 Объем куба равен 12. Найдите объем четырехугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной — центр куба. 	

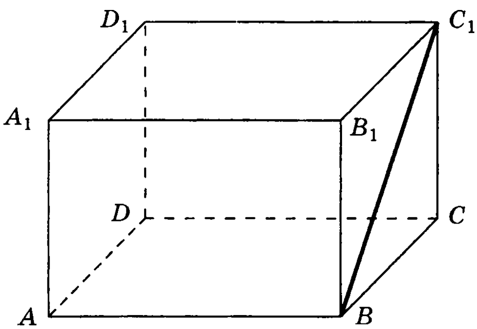
ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ И ПРЯМОЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЫ

Таблица 61

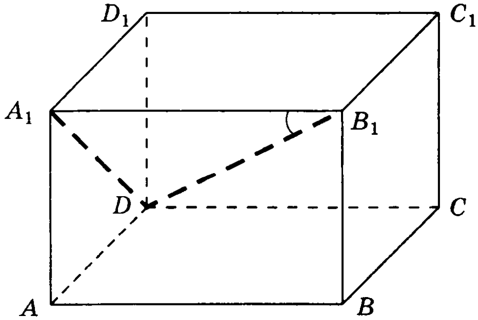
1 Найдите квадрат расстояния между вершинами A_1 и C прямоугольного параллелепипеда $A...D_1$, если $AB = 6$, $BC = 3$, $AA_1 = 4$.



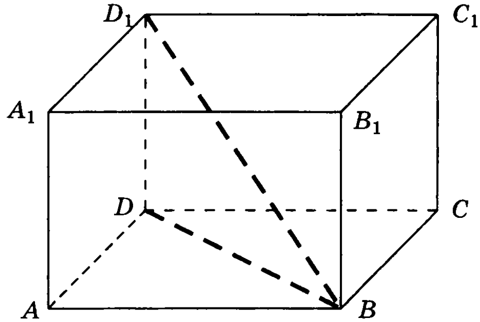
2 Найдите расстояние между вершинами B и C_1 прямоугольного параллелепипеда $A...D_1$, если $AB = 6$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$.



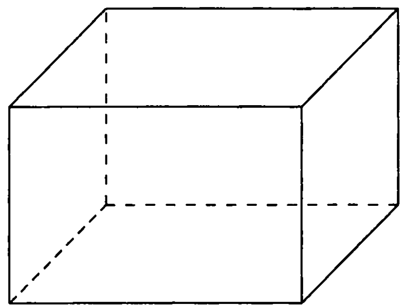
3 В прямоугольном параллелепипеде $A...D_1$ найдите $\angle DB_1A_1$, если известно, что $AB = 13$, $BC = 5$, $AA_1 = 12$.



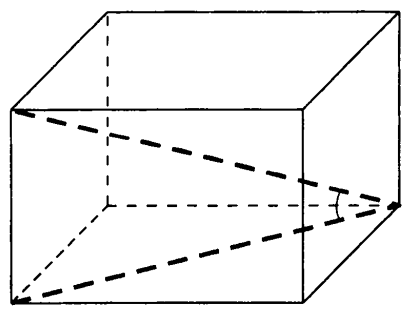
4 В прямоугольном параллелепипеде $A...D_1$ найдите $\angle DBD_1$, если известно, что $AB = 13$, $BC = 5$, $AA_1 = 12$.



5 Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 6 и 8. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна 208. Найдите длину третьего ребра, выходящего из той же вершины.

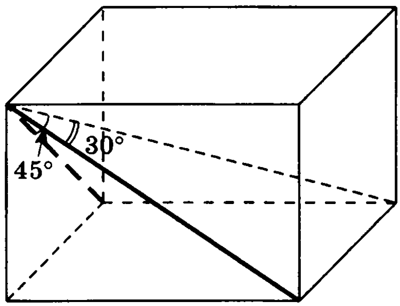


6 Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 6 и 8. Диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол, тангенс которого равен 0,8. Определите полную поверхность параллелепипеда.

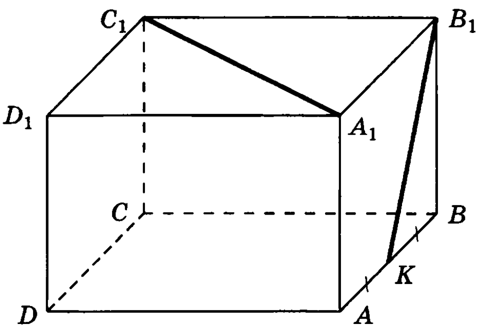


Продолжение табл. 61

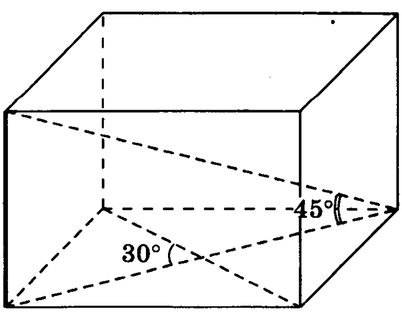
7 Определите объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна 1 и составляет с одной гранью угол 30°, а с другой 45°.



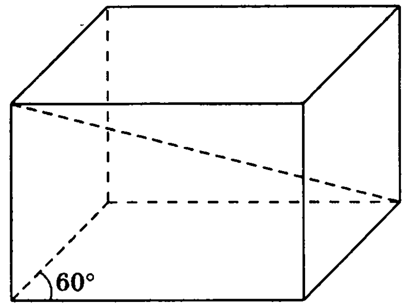
8 В прямоугольном параллелепипеде $A...D_1$ $AB = 2$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$, точка K — середина ребра AB. Найдите угол между прямыми A_1C_1 и B_1K.



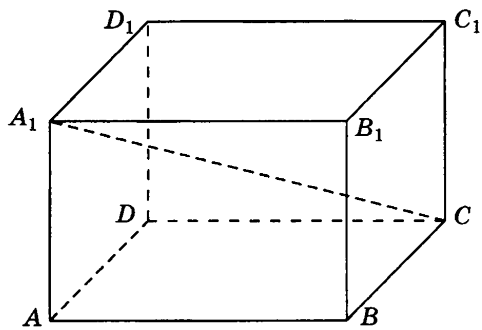
9 Угол между диагоналями основания прямоугольного параллелепипеда равен 30°. Диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите высоту параллелепипеда, если его объем равен 16.



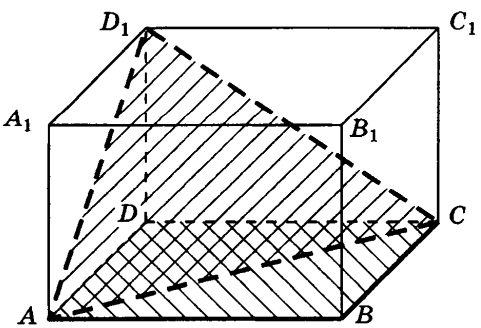
10 В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм со сторонами 2 и 8 и острым углом 60°. Большая диагональ параллелепипеда равна $2\sqrt{33}$. Определите его объем.



11 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $A_1C = 12$, $AA_1 = 4$, $AB = 2\sqrt{7}$. Найдите длину ребра B_1C_1.

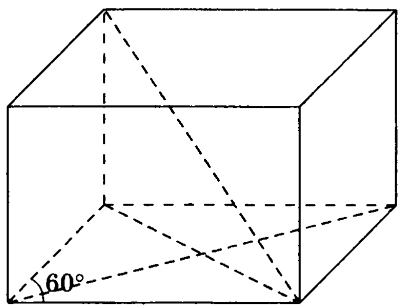


12 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер: $AB = 6$, $AD = 8$, $CC_1 = 18$. Найдите угол между плоскостями ABC и D_1AC.

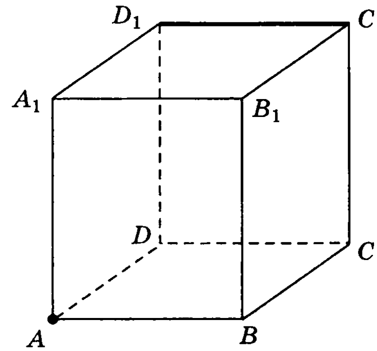


Окончание табл. 61

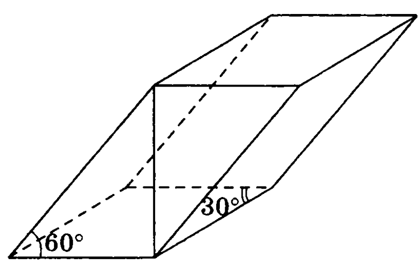
13 В прямом параллелепипеде стороны основания равны 2 и 1, острый угол между ними равен 60°. Большая диагональ основания равна меньшей диагонали параллелепипеда. Найдите объем параллелепипеда.



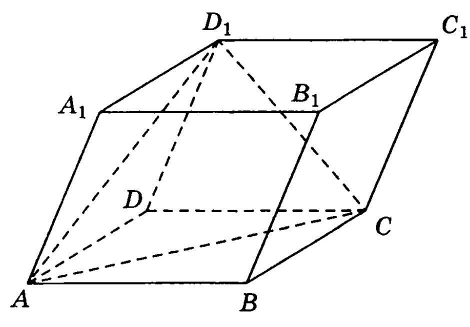
15 Основанием прямого параллелепипеда $A...D_1$ является ромб $ABCD$, сторона которого равна $4\sqrt{3}$, а угол BAD равен 60°. Найдите расстояние от точки A до прямой C_1D_1, если известно, что боковое ребро данного параллелепипеда равно 8.



14 Основанием параллелепипеда служит ромб с острым углом 30°. Диагональ одной боковой грани перпендикулярна плоскости основания, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 60°. Найдите сторону основания, если полная поверхность параллелепипеда равна $4\sqrt{3}$.



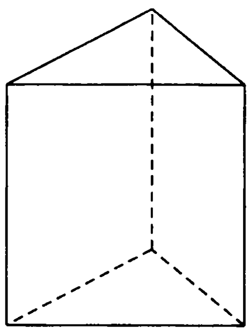
16 Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 18. Найдите объем треугольной пирамиды D_1ABC.



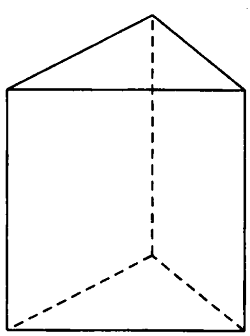
ПРАВИЛЬНАЯ И ПРЯМАЯ ТРЕУГОЛЬНАЯ ПРИЗМЫ

Таблица 62

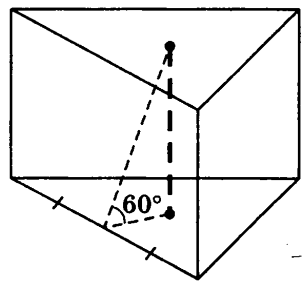
1 Объем правильной треугольной призмы равен $25\sqrt{3}$. Радиус окружности, описанной около основания призмы, равен $5/\sqrt{3}$. Найдите высоту призмы.



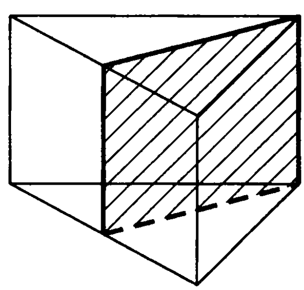
2 Объем правильной треугольной призмы равен $72\sqrt{3}$, ее высота равна 8. Найдите сторону основания.



3 Боковая поверхность правильной треугольной призмы равна 6. Найдите высоту призмы, если прямая, проходящая через центр верхнего основания и середину стороны нижнего основания, наклонена к плоскости основания под углом 60°.



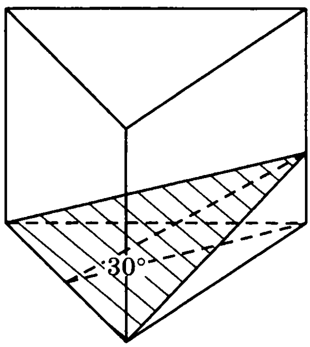
4 Объем правильной треугольной призмы равен 3. Найдите площадь сечения, проведенного через боковое ребро и равного ему высоту основания.



Продолжение табл. 62

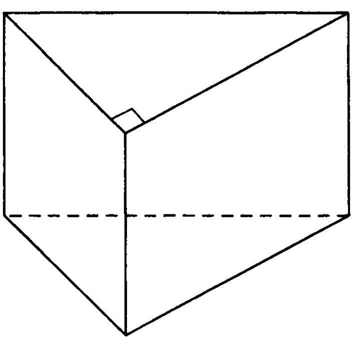
5

Через сторону основания правильной треугольной призмы проведена плоскость, отсекающая от призмы пирамиду, объем которой равен 1. Найдите площадь сечения, если угол между секущей плоскостью и плоскостью основания равен 30°.



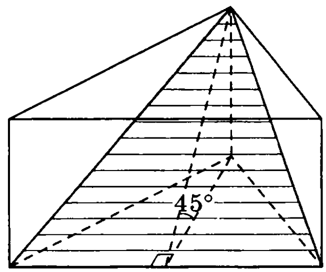
6

Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12. Объем призмы равен 75. Найдите длину бокового ребра.



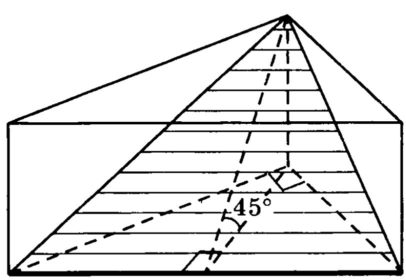
7

В правильной треугольной призме через сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания проведена плоскость, составляющая с плоскостью нижнего основания угол 45°. Плоскость сечения равна 1. Найдите объем призмы.



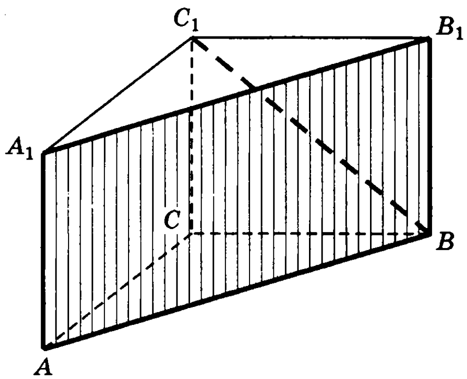
8

В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с острым углом 30°. Через гипотенузу нижнего основания и вершину прямого угла верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол 45°. Определите гипотенузу основания, если объем треугольной пирамиды, отсеченной от призмы плоскостью, равен 2.

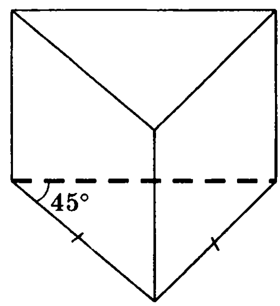


Продолжение табл. 62

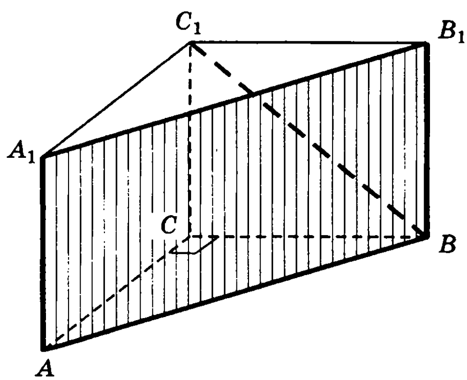
9 Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, $AC = BC = 10$, $AB = 16$. Высота призмы равна 6. Найдите угол между прямой C_1B и плоскостью ABB_1.



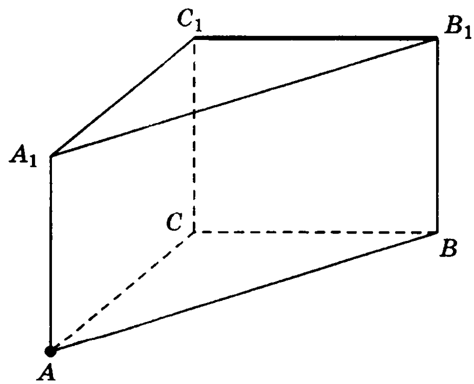
11 Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник с углом 45° при основании. Найдите основание треугольника, если объем призмы равен $\sqrt{2}-1$, а боковая поверхность равна сумме площадей оснований.



10 Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC, $\angle C = 90°$, $AB = 10$, $BC = 2\sqrt{5}$, высота призмы равна $2\sqrt{3}$. Найдите угол между прямой BC_1 и плоскостью ABB_1.

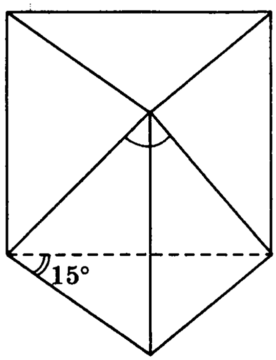


12 Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, боковая сторона которого равна $8\sqrt{3}$, а $\angle ACB = 120°$. Найдите расстояние от точки A до прямой B_1C_1, если боковое ребро $AA_1 = 5$.



Окончание табл. 62

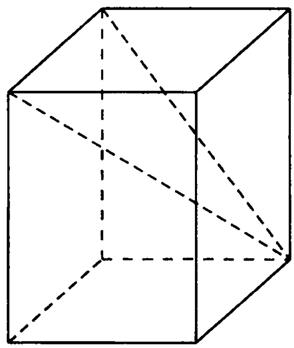
13 **Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с острым углом 15°. Наибольшая по площади боковая грань призмы представляет собой квадрат. Найдите тангенс угла между пересекающимися диагоналями двух других боковых граней.**



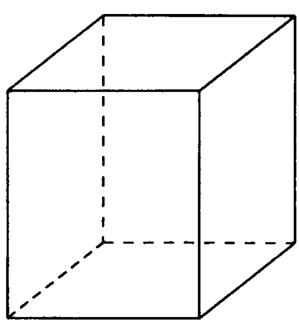
ПРАВИЛЬНАЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 63

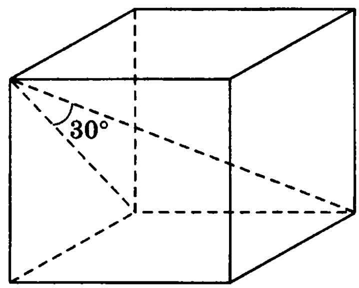
1 Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 14, а диагональ боковой грани — 10. Определите полную поверхность призмы.



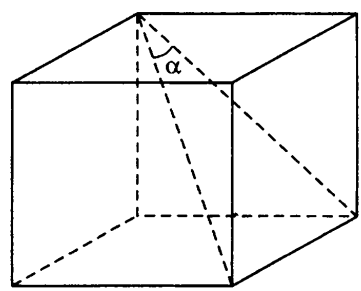
2 Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 9, а полная поверхность ее равна 144. Определите сторону основания и боковое ребро.



3 В правильной четырехугольной призме сторона основания равна 1, а диагональ призмы образует с плоскостью боковой грани угол 30°. Найдите объем призмы.



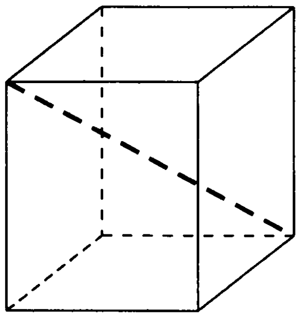
4 Объем правильной четырехугольной призмы равен 1. Найдите сторону основания, если угол между диагональю призмы и боковой гранью равен α.



Окончание табл. 63

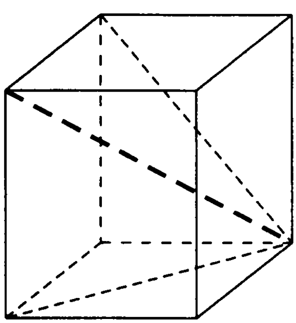
5

В правильной четырехугольной призме площадь основания равна 144, а высота — 14. Определите диагональ этой призмы.



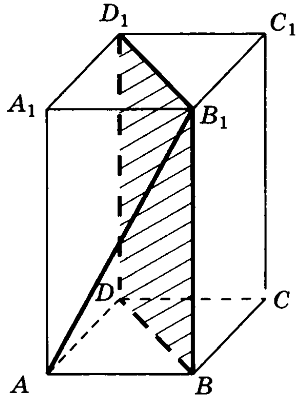
6

Определите диагональ правильной четырехугольной призмы, если диагональ основания равна 8, а диагональ боковой грани равна 7.



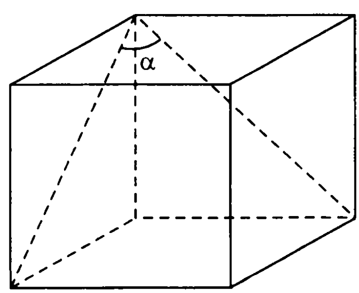
7

В правильной четырехугольной призме $A...D_1$, стороны основания которой равны 2, а боковые ребра равны 4, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.



8

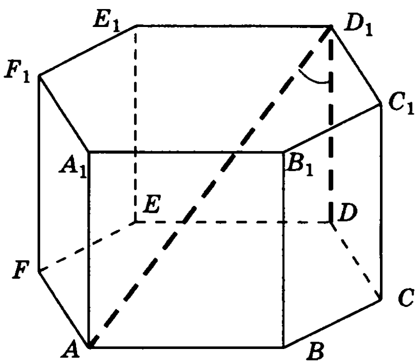
Объем правильной четырехугольной призмы равен 1, а $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, где α — угол между диагоналями двух смежных боковых граней. Найдите сторону основания призмы.



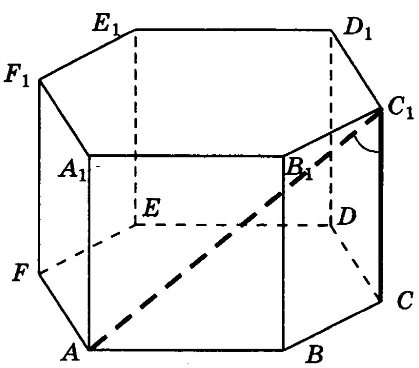
ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Таблица 64

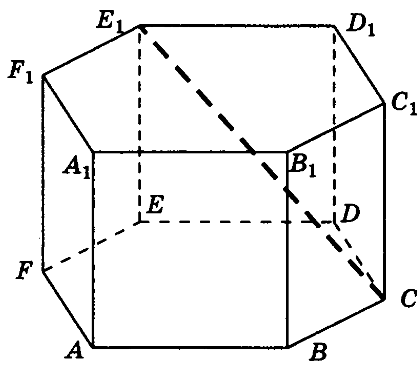
1 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{13}$, найдите тангенс угла AD_1D.



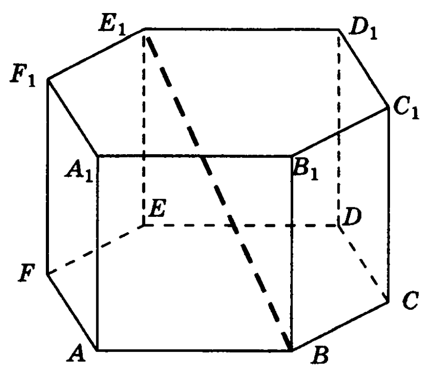
2 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны $\sqrt{7}$, найдите угол AC_1C.



3 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 13, найдите расстояние между точками C и E_1.



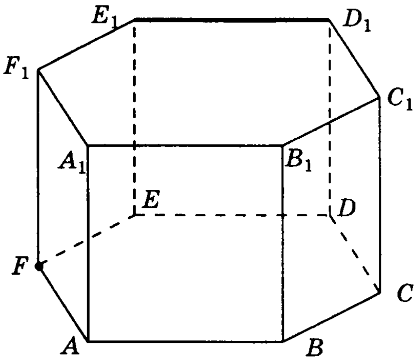
4 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны $2\sqrt{5}$, найдите расстояние между точками B и E_1.



Окончание табл. 64

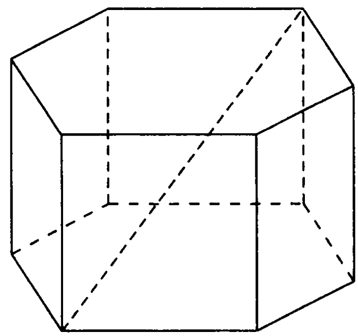
5

В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, стороны основания которой равны 6, а боковые ребра равны 8, найдите расстояние от точки F до прямой E_1D_1.



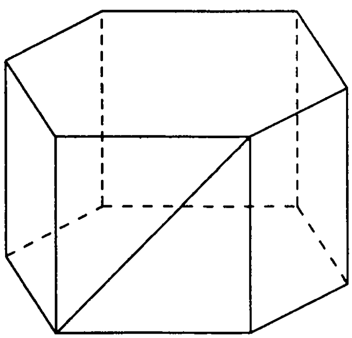
7

Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, если боковое ребро равно 5, а наибольшая диагональ — 13.



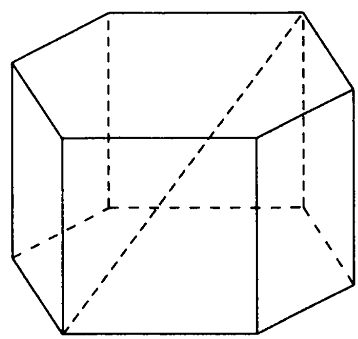
6

Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, если сторона основания равна 3, а диагональ боковой грани — 5.



8

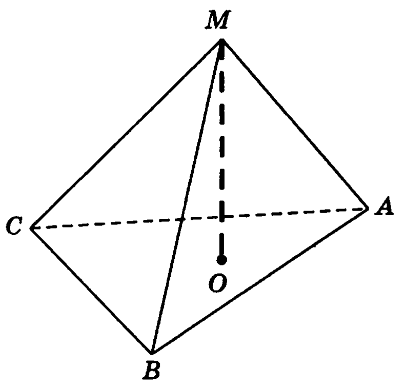
Определите объем правильной шестиугольной призмы, если длина наибольшей диагонали равна 1, а боковые грани — квадраты.



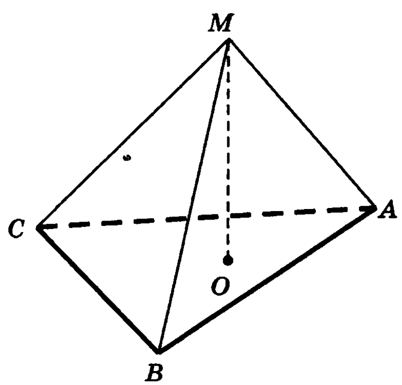
ПРАВИЛЬНАЯ ТРЕУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 65

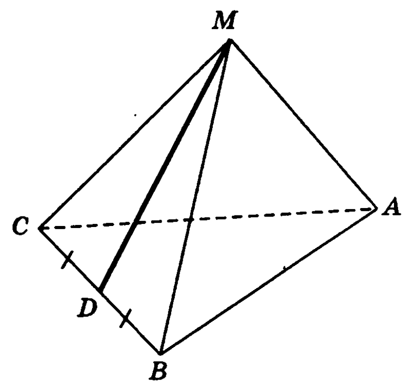
1 В правильной треугольной пирамиде $MABC$ площадь основания равна 13, объем пирамиды равен 91. Найдите длину высоты MO.



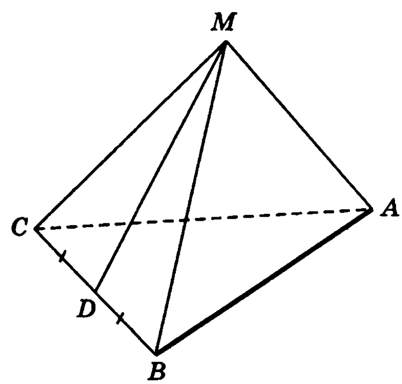
2 В правильной треугольной пирамиде $MABC$ объем равен 72, а высота MO равна 12. Найдите площадь основания пирамиды.



3 В правильной треугольной пирамиде $MABC$ D — середина ребра BC. Известно, что $AB = 8$, а площадь боковой поверхности равна 96. Найдите длину апофемы MD.

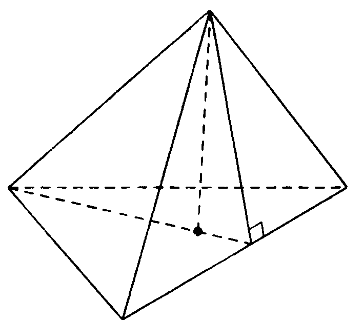


4 В правильной треугольной пирамиде $MABC$ D — середина BC. Известно, что $MD = 12$, а площадь боковой поверхности равна 90. Найдите длину отрезка AB.

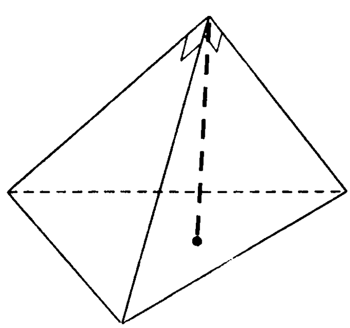


Продолжение табл. 65

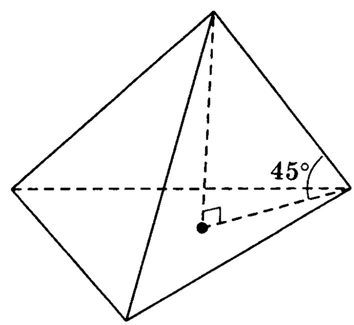
5 Определите объем правильной треугольной пирамиды, если высота треугольника в основании пирамиды равна 1, а апофема равна 2.



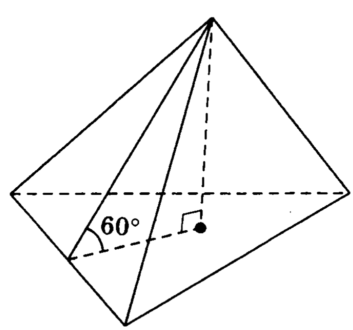
6 Определите высоту правильной треугольной пирамиды, объем которой равен $4\sqrt{3}$, если все плоские углы при вершине прямые.



7 Высота правильной треугольной пирамиды равна $4\sqrt{3}$, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем пирамиды.

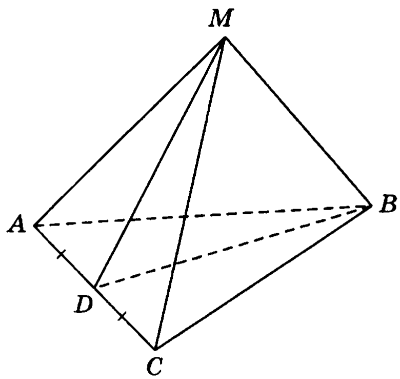


8 Высота правильной треугольной пирамиды равна $4\sqrt{3}$, а боковая грань образует с плоскостью основания угол 60°. Найдите объем пирамиды.

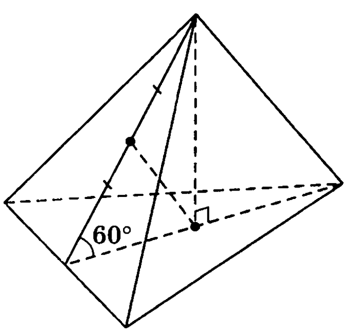


Продолжение табл. 65

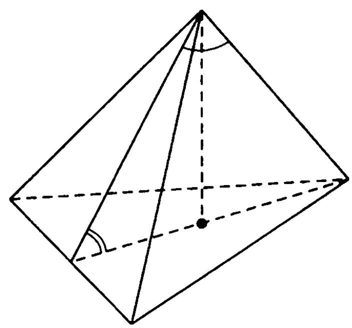
9 В правильной треугольной пирамиде $MABC$ D — середина AB, $AB = 9$, $MD = 6$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



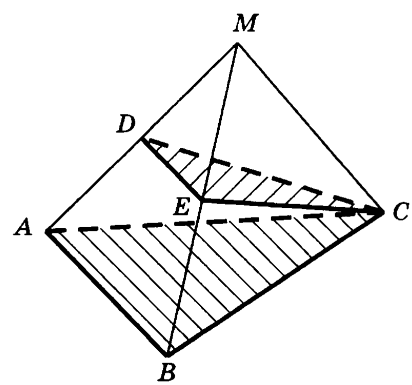
10 Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды равен 60°. Найдите боковую поверхность пирамиды, если расстояние от центра основания до середины апофемы боковой грани равно 1.



11 Боковая грань правильной треугольной пирамиды составляет с плоскостью основания угол, тангенс которого равен 2. Найдите тангенс угла между боковым ребром и апофемой противолежащей грани.

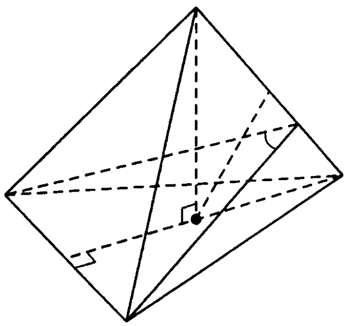


12 В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC, точка D — середина ребра MA, точка E — середина ребра MB. Найдите угол между плоскостями CDE и ABC, если $MC = 18$, $AB = 12$.

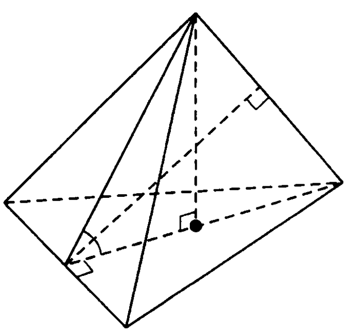


Продолжение табл. 65

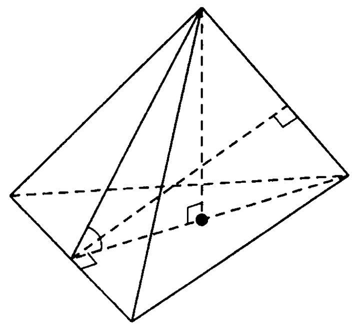
13 Отрезок прямой, соединяющий центр основания правильной треугольной пирамиды с серединой бокового ребра, равен стороне основания. Найдите тангенс угла между смежными боковыми гранями.



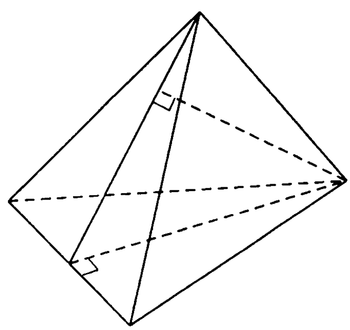
14 В правильной треугольной пирамиде расстояние от стороны основания до непересекающего ее ребра в 3 раза меньше стороны основания. Найдите тангенс угла между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.



15 В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 2. Расстояние между боковым ребром и непересекающей его стороной основания равно 1. Найдите двугранный угол при основании пирамиды.

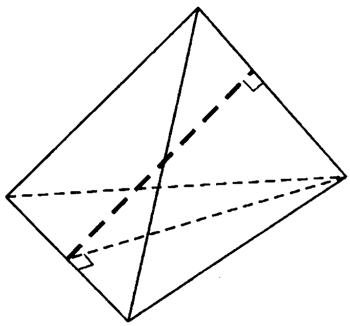


16 Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 2, а высота, опущенная из вершины основания на противоположную ей боковую грань, равна 1. Определите объем пирамиды.

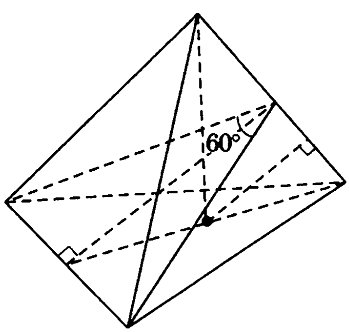


Продолжение табл. 65

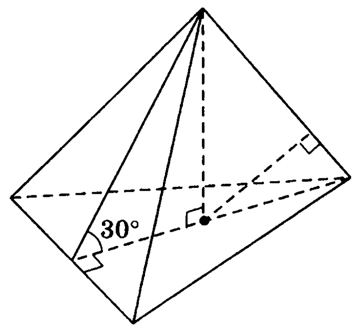
17 В правильной треугольной пирамиде, объем которого равен $9\sqrt{2}$ и плоский угол при вершине 90°, найдите расстояние между боковым ребром и противоположной стороной основания.



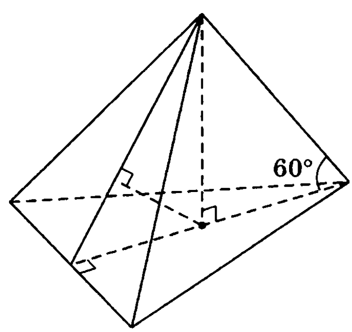
18 Из основания высоты правильной треугольной пирамиды опущен перпендикуляр длиной 1 на боковое ребро. Найдите объем пирамиды, если двугранный угол между ее боковыми гранями равен 60°.



19 Из основания высоты правильной треугольной пирамиды опущен перпендикуляр длиной 1 на боковое ребро. Найдите объем пирамиды, если двугранный угол между боковой гранью и основанием пирамиды равен 30°.

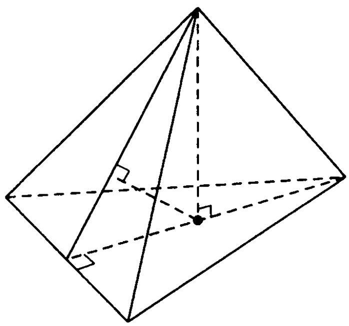


20 Из основания высоты правильной треугольной пирамиды опущен перпендикуляр длиной 1 на боковую грань. Найдите объем пирамиды, если боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 60°.

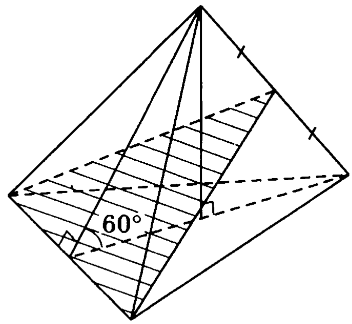


Окончание табл. 65

21 В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен 60°. Найдите боковую поверхность пирамиды, если расстояние от центра основания до боковой грани равно 1.



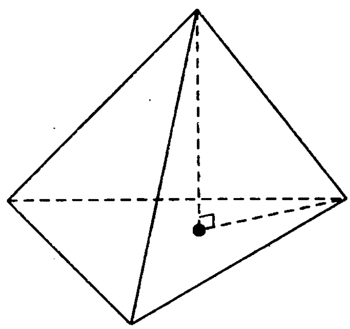
22 Высота правильной треугольной пирамиды равна 1. Боковая грань составляет с плоскостью основания угол 60°. Через сторону основания и середину противолежащего бокового ребра проведена плоскость. Найдите площадь полученного сечения.



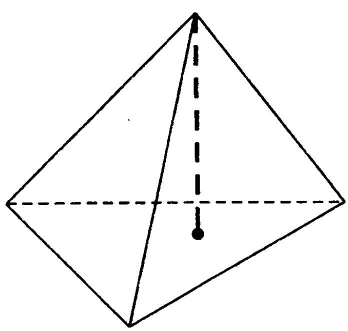
ПРАВИЛЬНЫЙ ТЕТРАЭДР

Таблица 66

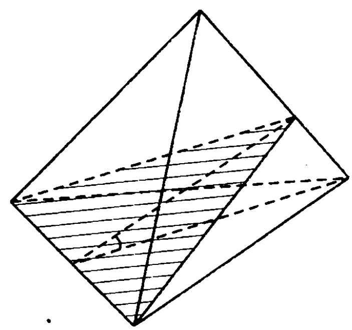
1 Вычислить объем правильного тетраэдра, если радиус окружности, описанной около его грани, равен 1.



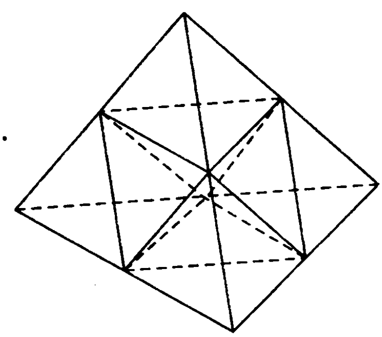
2 Полная поверхность правильного тетраэдра равна $24\sqrt{3}$. Определите высоту тетраэдра.



3 В правильном тетраэдре через сторону основания проведена плоскость, делящая объем пирамиды в отношении 2 : 3, считая от основания. Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания.



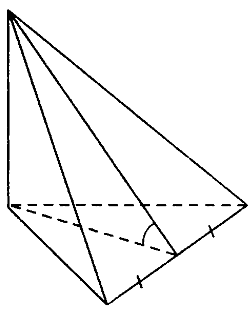
4 Площадь поверхности тетраэдра равна 6,8. Найдите площадь поверхности многогранника, вершинами которого являются середины сторон данного тетраэдра.



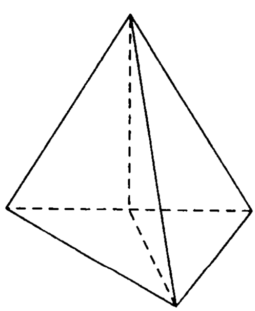
ТРЕУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 67

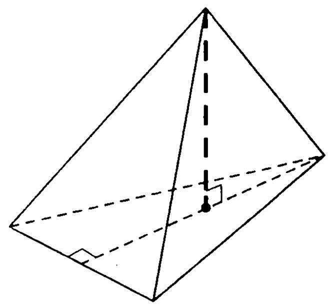
1 Основанием пирамиды служит равносторонний треугольник. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания. Найдите угол между третьей боковой гранью и плоскостью основания, если боковая поверхность пирамиды относится к площади основания как 13 : 3.



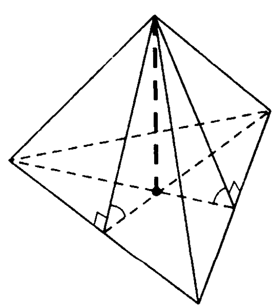
2 Основанием пирамиды служит равносторонний треугольник. Одна из боковых граней — также равносторонний треугольник и перпендикулярна плоскости основания. Определите сторону основания пирамиды, если полная поверхность пирамиды равна $\sqrt{5}+2$.



3 Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого основание равно 6 и высота 9; боковые ребра равны между собой, и каждое равно 13. Определите высоту пирамиды.

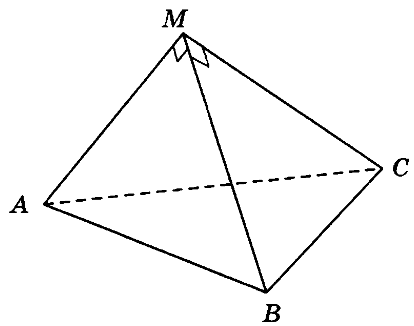


4 Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого основание равно 12, а боковая сторона — 10. Боковые грани образуют с основанием равные двугранные углы, содержащие по 45°. Определите высоту пирамиды.

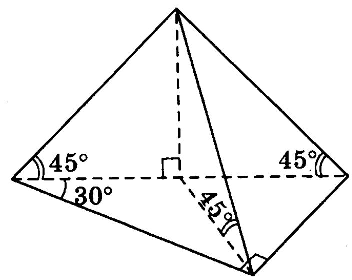


Окончание табл. 67

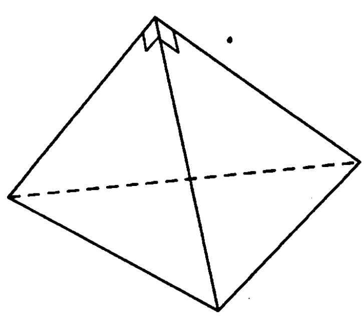
5 Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 6. Найдите объем пирамиды.



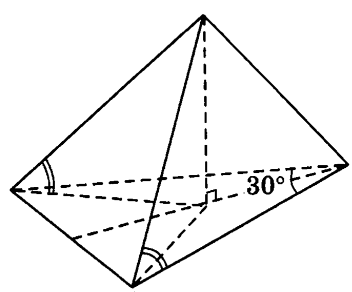
7 В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 1, и острым углом 30°. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем пирамиды.



6 В треугольной пирамиде боковые ребра попарно перпендикулярны. Их длины составляют соответственно 3; 5 и 8. Найдите объем пирамиды.



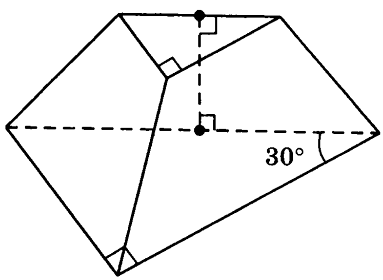
8 Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, площадь которого равна 3, а угол между боковыми сторонами равен 30°. Все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания одинаковые углы. Найдите тангенс этого угла, если объем пирамиды равен 1.



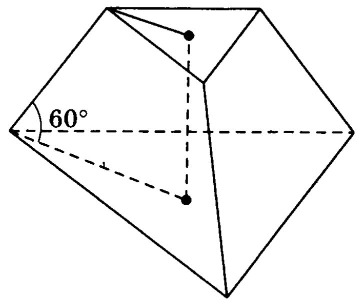
ТРЕУГОЛЬНАЯ УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА

Таблица 68

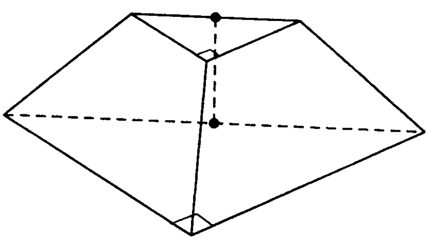
1 Основаниями усеченной пирамиды служат прямоугольные треугольники с острым углом 30°. Гипотенузы треугольников равны соответственно 6 и 4. Найдите объем усеченной пирамиды, если ее высота равна $\sqrt{3}$.



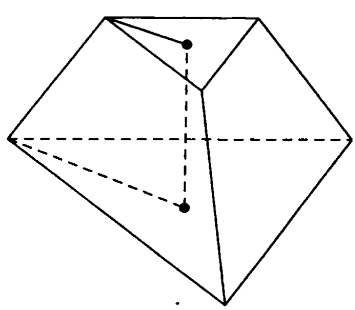
3 Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды равны 2 и 1, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите объем усеченной пирамиды.



2 Основаниями усеченной пирамиды служат равнобедренные прямоугольные треугольники, гипотенузы которых равны 7 и 5. Найдите объем усеченной пирамиды, если ее высота равна 12.



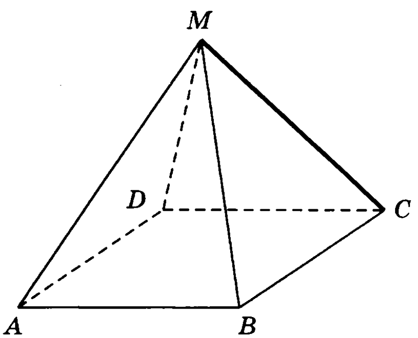
4 Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 6 и 12, высота равна 1. Найдите боковую поверхность.



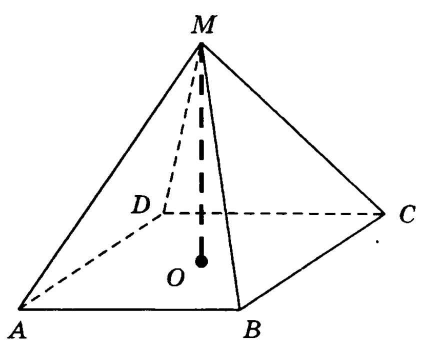
ПРАВИЛЬНАЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 69

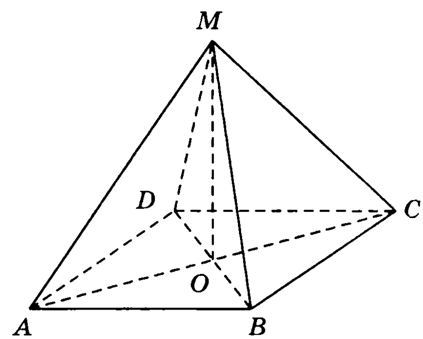
1 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ известно, что $MO = 12$, $AC = 10$. Найдите длину бокового ребра MC.



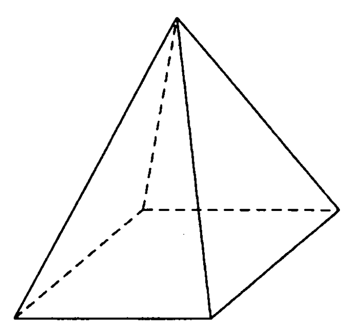
2 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ известно, что $MC = 10$, $AC = 12$. Найдите длину высоты MO.



3 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ $MA = 20$, высота $MO = 12$. Найдите длину BD.

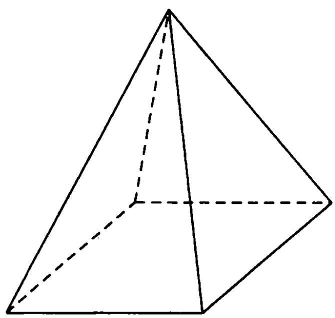


4 Боковая поверхность правильной четырехугольной пирамиды равна 60, а сторона основания — 6. Найдите объем пирамиды.

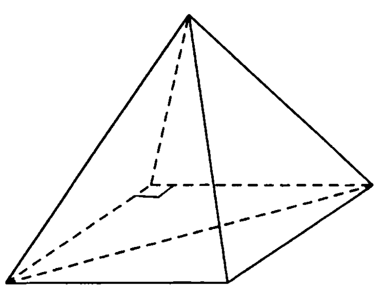


Продолжение табл. 69

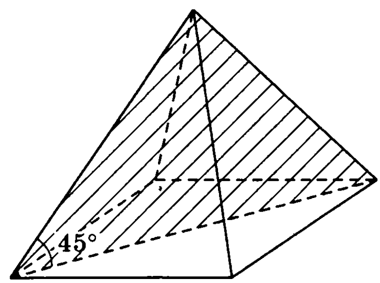
5 Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 12, а сторона основания — 18. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



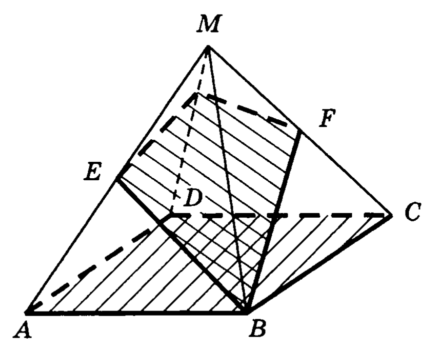
6 Диагональ квадрата, лежащего в основании правильной четырехугольной пирамиды, равна длине бокового ребра и равна 1. Найдите полную поверхность пирамиды.



7 Определите объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 45°, а площадь диагонального сечения равна 1.

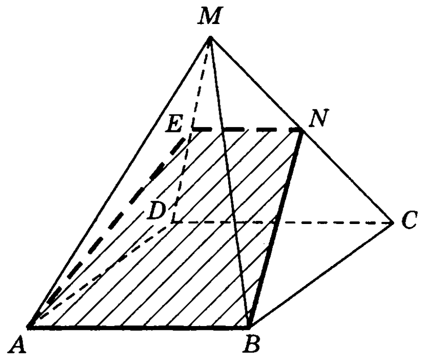


8 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$, точка E — середина ребра MA, точка F — середина ребра MC. Найдите угол между плоскостями BEF и ABC, если $AB = 6$, $MC = 8$.

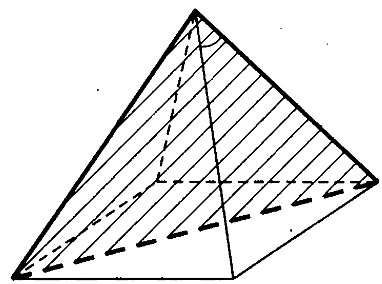


Продолжение табл. 69

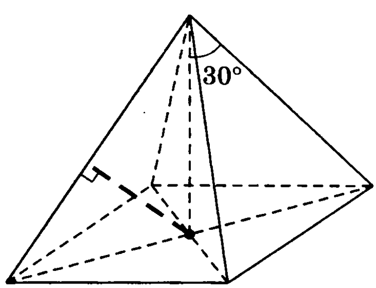
9 В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ боковое ребро $MA = \sqrt{5}$, сторона основания равна 2. Найдите расстояние от точки M до плоскости ABN, где N — середина ребра MC.



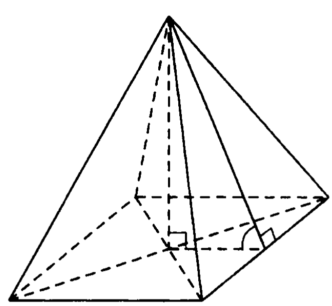
11 В правильной четырехугольной пирамиде косинус плоского угла при вершине равен 16/25. Найдите отношение площади диагонального сечения к площади ее основания.



10 В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 1, а плоский угол при вершине пирамиды равен 30°. Найдите расстояние от центра основания пирамиды до ее бокового ребра.

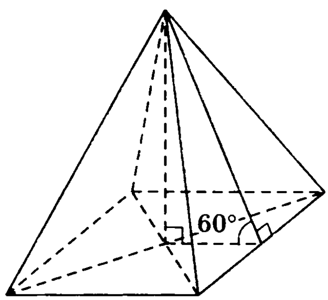


12 Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна 10. Тангенс двугранного угла при основании равен 4/3. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

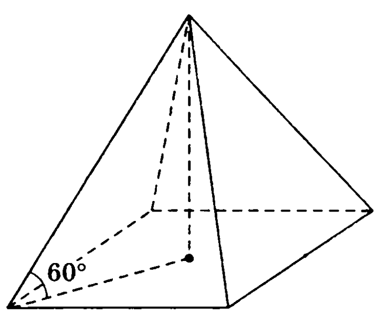


Окончание табл. 69

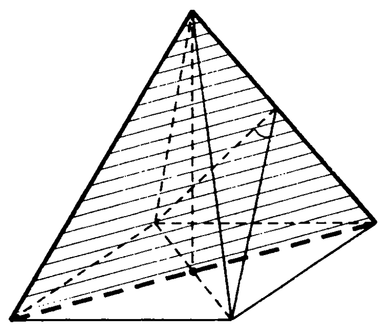
13 Апофема боковой грани правильной четырехугольной пирамиды равна $6\sqrt{3}$, а угол между апофемой боковой грани и плоскостью основания — $60°$. Найдите объем пирамиды.



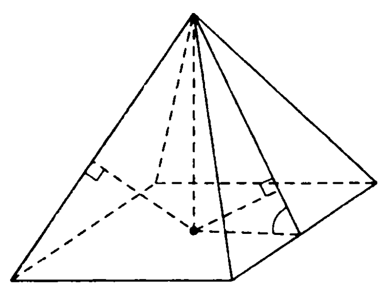
14 Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 1 и наклонено к плоскости основания под углом $60°$. Найдите объем пирамиды.



15 В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен $120°$. Найдите площадь диагонального сечения, если боковая поверхность равна 4.



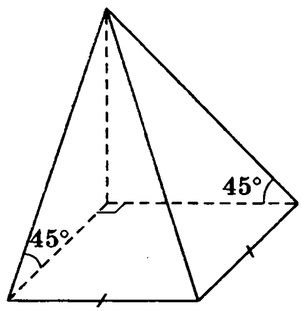
16 В правильной четырехугольной пирамиде расстояния от центра основания до боковой грани и до бокового ребра равны соответственно $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. Найдите двугранный угол при основании пирамиды.



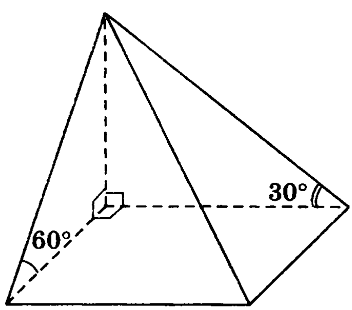
ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 70

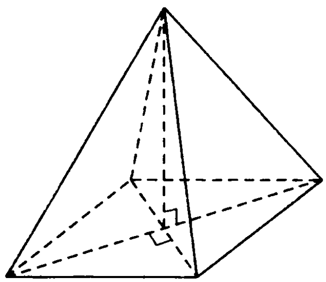
1 В основании пирамиды лежит квадрат. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к нему под углом 45°. Найдите объем пирамиды, если длина среднего по величине ребра равна 1.



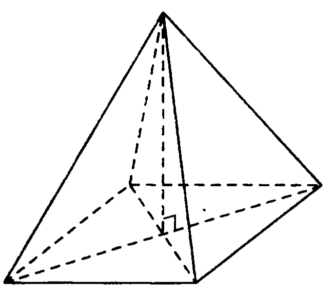
2 В основании пирамиды лежит прямоугольник. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углами 30° и 60°. Найдите площадь основания пирамиды, если объем равен 9.



3 Основанием пирамиды служит ромб с диагоналями, равными 6 и 8; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба, лежащего в основании пирамиды, и равна 1. Определите боковую поверхность пирамиды.



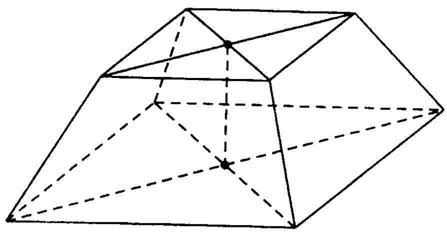
4 Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны равны 20 и 36, а площадь равна 360, высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 12. Определите боковую поверхность пирамиды.



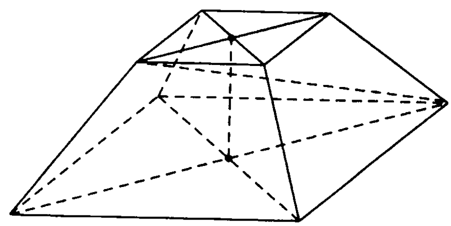
ПРАВИЛЬНАЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНАЯ УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА

Таблица 71

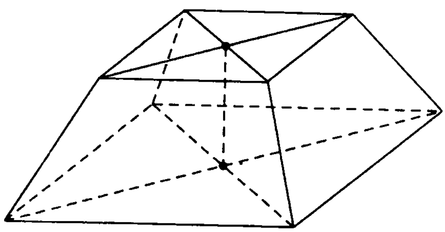
1 Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 3 и 5, ребро усеченной пирамиды равно $\sqrt{17}$. Найдите площадь полной поверхности.



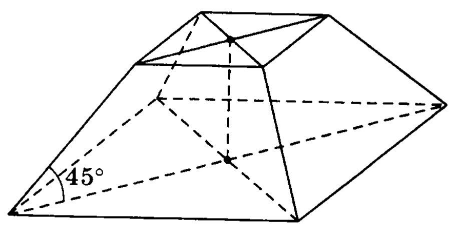
3 Определить объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если ее диагональ равна 18, а длины сторон оснований равны 14 и 10.



2 Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 3 и 1. Найдите объем усеченной пирамиды, если ее высота равна 3.

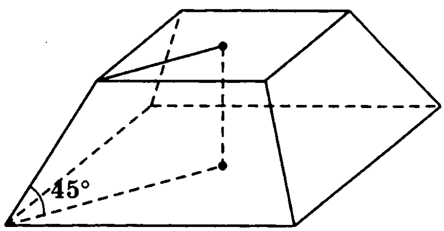


4 Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 3, сторона большего основания равна $9\sqrt{2}$. Найдите объем пирамиды, если боковое ребро составляет с основанием угол 45°.

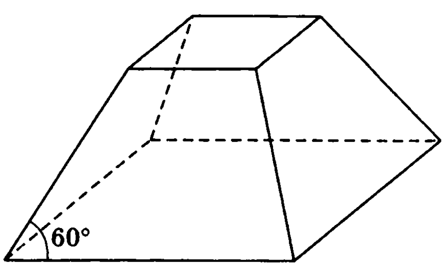


Окончание табл. 71

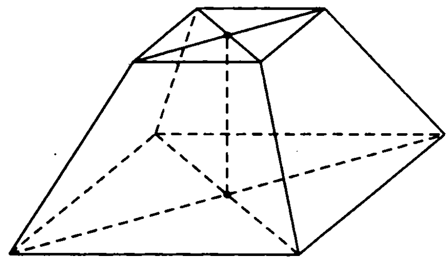
5 Основаниями правильной усеченной пирамиды служат квадраты со сторонами 2 и 1. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45°. Определите объем усеченной пирамиды.



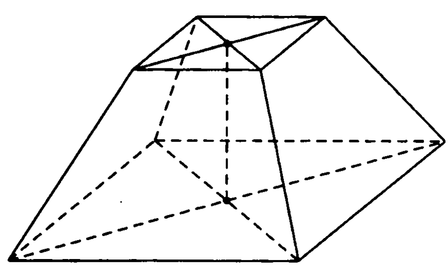
6 Стороны оснований правильной четырехугольной пирамиды равны 2 и 1. Определить объем пирамиды, если острый угол боковой грани равен 60°.



7 Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны 2 и 1. Найдите объем пирамиды, если боковая поверхность равна половине полной поверхности.



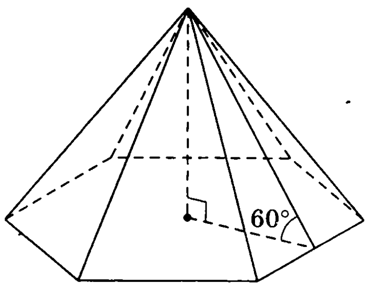
8 В усеченной пирамиде разность площадей оснований равна 6, высота усеченной пирамиды равна 9, объем — 42. Определите площади оснований.



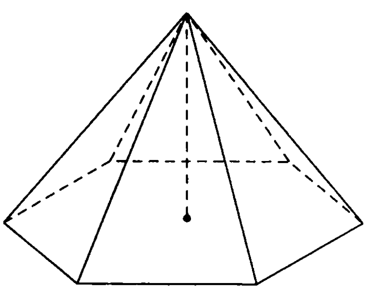
ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Таблица 72

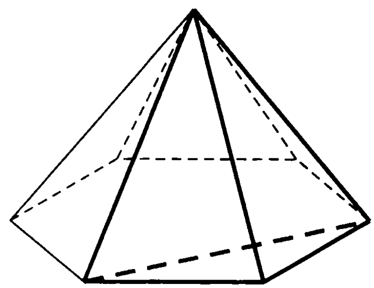
1 В правильной шестиугольной пирамиде апофема равна 1, а двугранный угол при основании равен 60°. Найдите полную поверхность пирамиды.



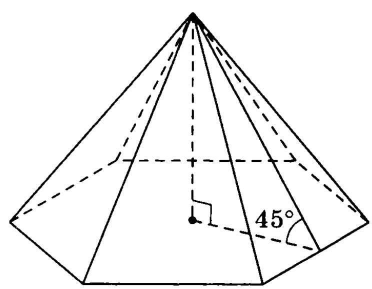
2 Найдите боковую поверхность правильной шестиугольной пирамиды, высота которой равна 1, а боковое ребро равно 2.



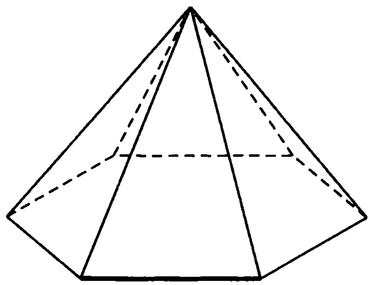
3 Объем треугольной пирамиды, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды, равен 1. Найдите объем шестиугольной пирамиды.



4 Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 8, а угол между боковой гранью и основанием равен 45°. Найдите объем пирамиды.



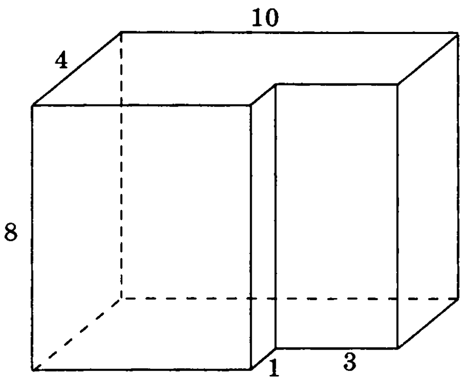
Окончание табл. 72

5	Найдите сторону основания правильной шестиугольной пирамиды, объем которой равен $9\sqrt{11}/4$, если известно, что ее боковая поверхность в 10 раз больше площади основания. 

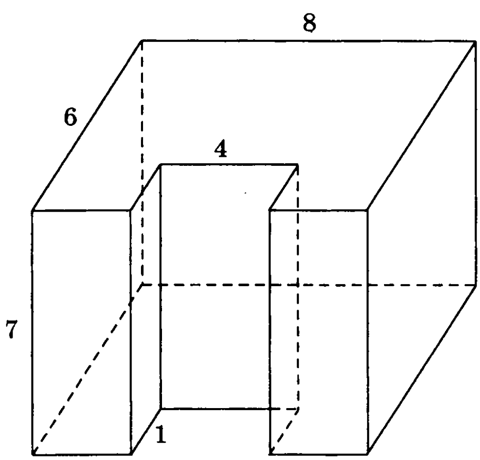
МНОГОГРАННИКИ

Таблица 73

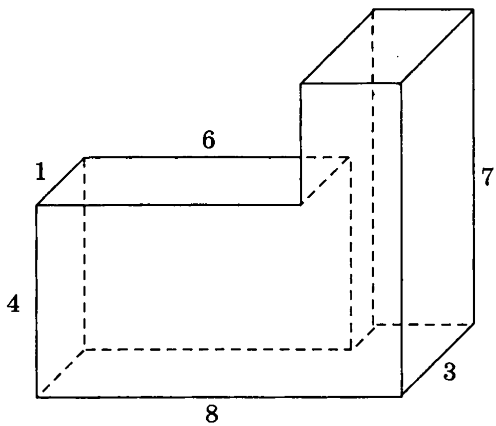
1 Найдите площадь поверхности многогранника (все двугранные углы прямые).



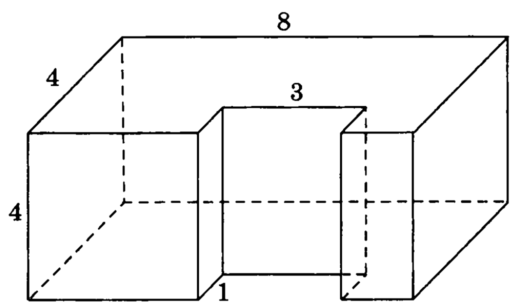
2 Найдите площадь поверхности многогранника (все двугранные углы прямые).



3 Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

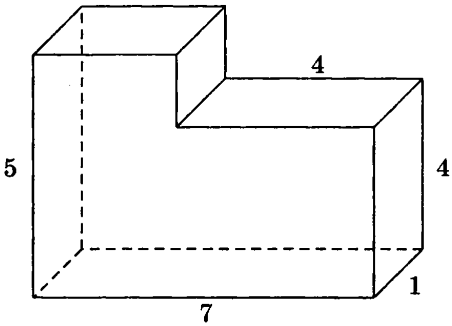


4 Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

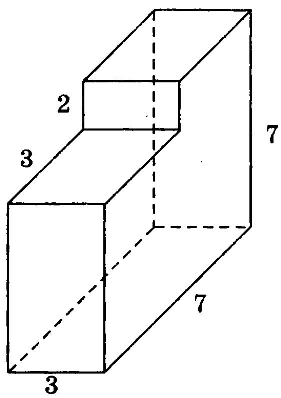


Окончание табл. 73

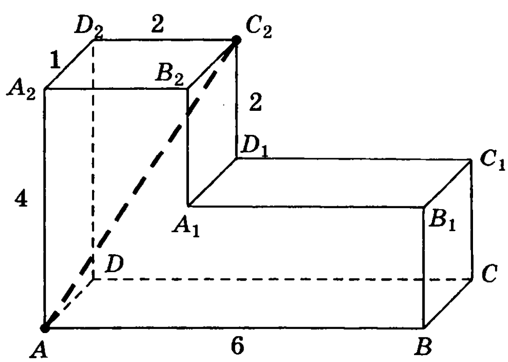
5 Найдите объем многогранника (все двугранные углы прямые).



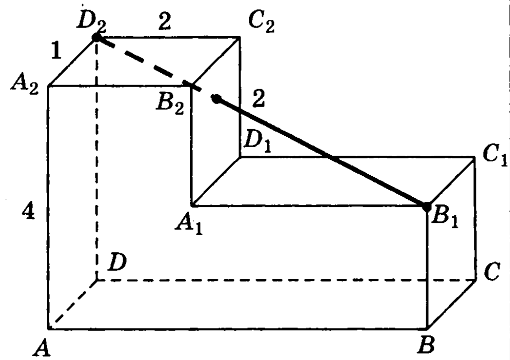
6 Найдите объем многогранника (все двугранные углы прямые).



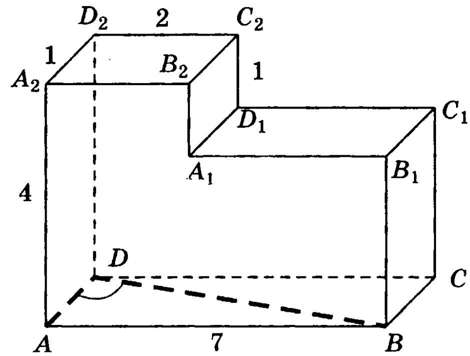
7 Найдите квадрат расстояния между вершинами A и C_2 многогранника. Все двугранные углы прямые.



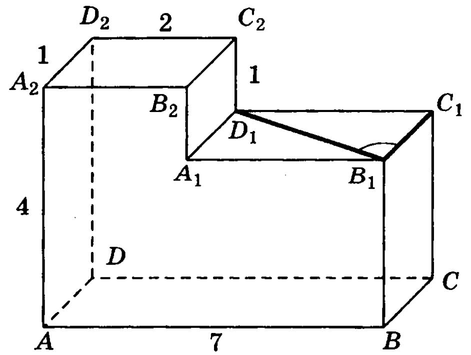
8 Найдите квадрат расстояния между вершинами B_1 и D_2 многогранника. Все двугранные углы прямые.



9 Найдите $\mathrm{tg}\,\angle ADB$ многогранника. Все двугранные углы прямые.



10 Найдите $\mathrm{tg}\,\angle D_1B_1C_1$ многогранника. Все двугранные углы прямые.

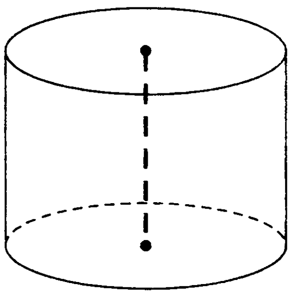


§ 12. Фигуры вращения

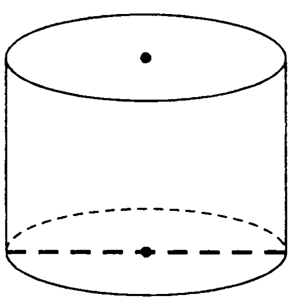
ЦИЛИНДР

Таблица 74

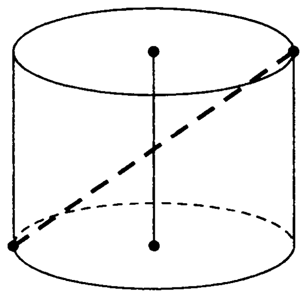
1 Площадь боковой поверхности цилиндра равна 81π, а диаметр основания — 9. Найдите высоту цилиндра.



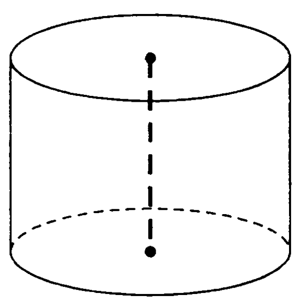
2 Площадь боковой поверхности цилиндра равна 20π, а высота — 4. Найдите диаметр основания.



3 Объем цилиндра равен $8\pi\sqrt{5}$, а высота — $2\sqrt{5}$. Найдите диагональ осевого сечения.



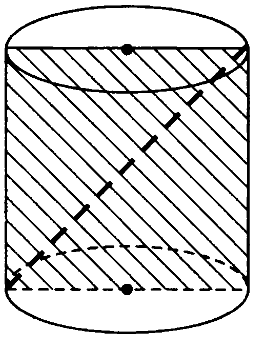
4 Площадь боковой поверхности цилиндра равна 24π, а его объем равен 48π. Найдите его высоту.



Продолжение табл. 74

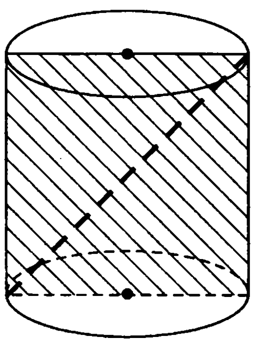
5

Осевым сечением цилиндра является квадрат с диагональю $6\sqrt[6]{2/\pi^2}$. Найдите объем цилиндра.



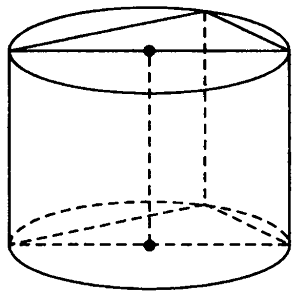
6

Осевым сечением цилиндра является квадрат с диагональю $\sqrt[3]{72\sqrt{2}/\pi}$. Найдите объем цилиндра.



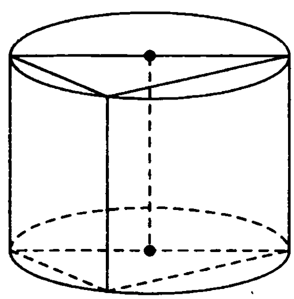
7

В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Боковые ребра равны $7/\pi$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.



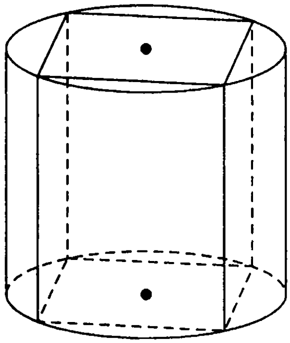
8

В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 12 и 5. Боковые ребра равны $16/\pi$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

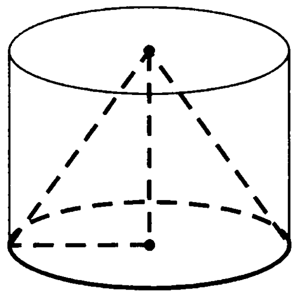


Окончание табл. 74

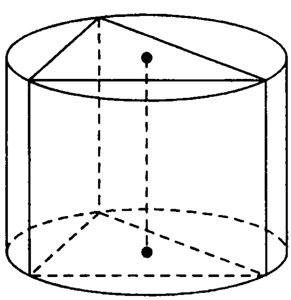
9 В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 5. Боковые ребра равны $18/\pi$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.



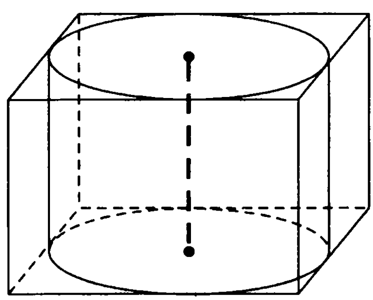
11 Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объем конуса, если объем цилиндра равен 150.



10 Правильная треугольная призма вписана в цилиндр, радиус основания которого равен $2\sqrt{3}$, а высота равна 2. Найдите площадь боковой поверхности призмы.



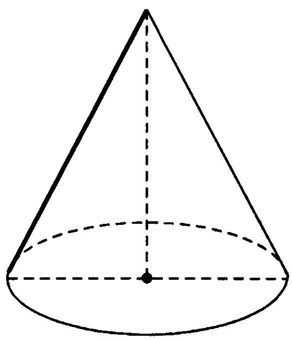
12 Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 4. Объем параллелепипеда равен 16. Найдите высоту цилиндра.



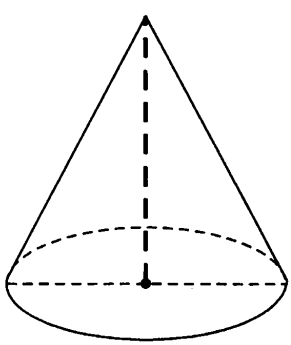
КОНУС

Таблица 75

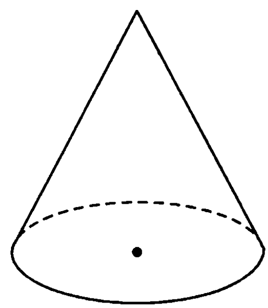
1 Высота конуса равна 8, а диаметр основания — 30. Найдите образующую конуса.



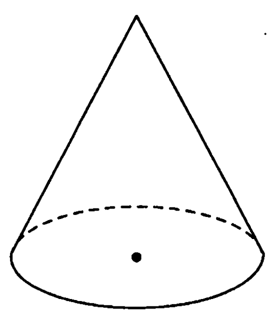
2 Диаметр основания конуса равен 56, а длина образующей — 53. Найдите высоту конуса.



3 Найдите площадь боковой поверхности прямого кругового конуса, если образующая его равна 7, а площадь основания равна $36/\pi$.

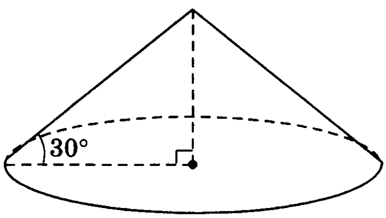


4 Площадь боковой поверхности конуса равна 13, длина образующей — $1/\sqrt{3\pi}$. Найдите площадь основания конуса.

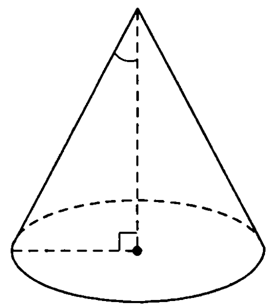


Продолжение табл. 75

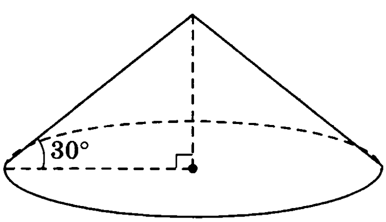
5 Образующая конуса $l = 6/\sqrt[3]{\pi}$ и составляет с плоскостью основания угол 30°. Найдите объем конуса.



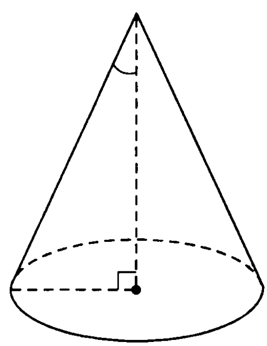
7 Площадь боковой поверхности конуса равна 65π, образующая конуса — 13. Найдите котангенс угла между образующей конуса и его высотой.



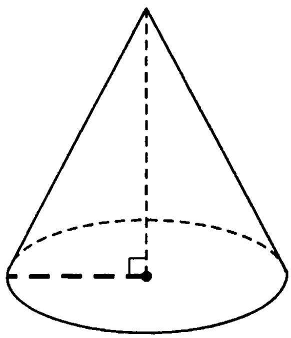
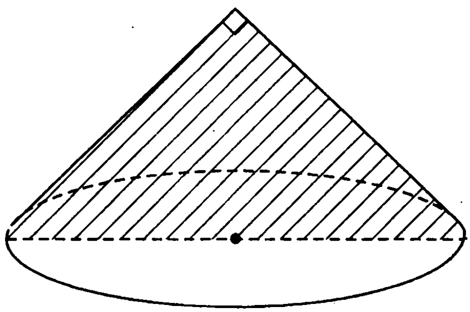
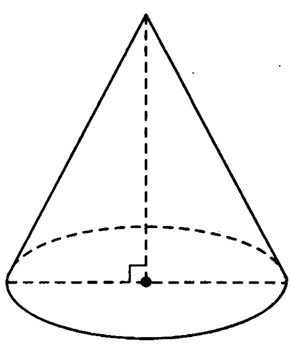
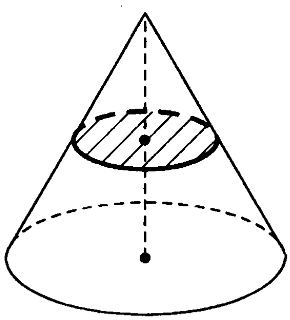
6 Образующая конуса $l = 4\sqrt[3]{9/\pi}$ и составляет с плоскостью основания угол 30°. Найдите объем конуса.



8 Объем конуса равен $4{,}5\pi$, высота его равна 6. Найдите тангенс угла между высотой и образующей конуса.

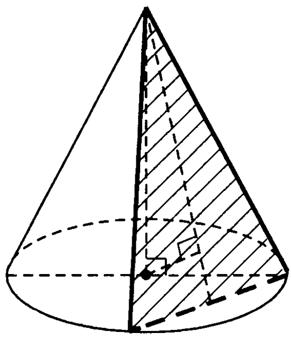


Продолжение табл. 75

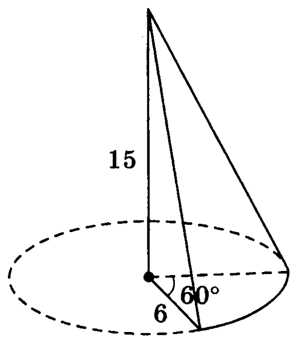
9 Объем конуса равен $2\pi^2/3$, а боковая поверхность равна сумме площадей основания и осевого сечения. Найдите радиус основания конуса. 	**11** Осевым сечением конуса служит равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь его равна 9. Найдите объем конуса. 
10 Разность между образующей и высотой конуса равна 1, а угол между ними равен 60°. Найдите объем конуса. 	**12** Объем конуса равен 24. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса. 

Окончание табл. 75

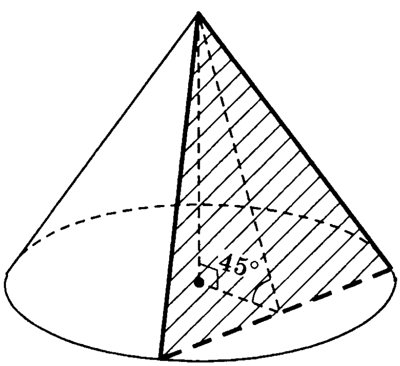
13 Высота конуса 20, радиус его основания 25. Найдите площадь сечения, проведенного через вершину, если его расстояние от центра основания конуса равно 12.



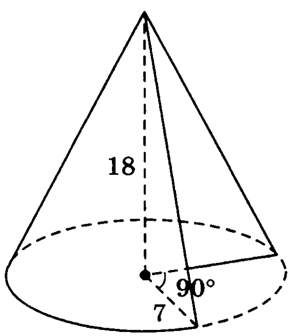
15 Найдите объем V части конуса. В ответе укажите значение V/π.



14 Через вершину конуса под углом в 45° к основанию проведена плоскость, отсекающая четверть окружности основания. Высота конуса равна 10. Определите площадь сечения.



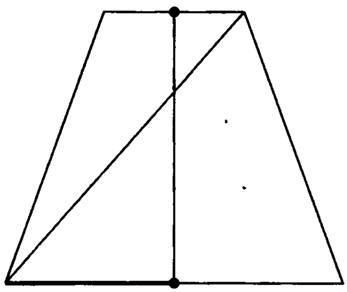
16 Найдите объем V части конуса. В ответе укажите значение V/π.



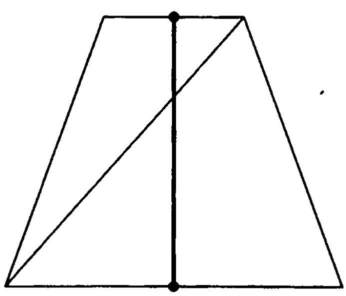
УСЕЧЕННЫЙ КОНУС

Таблица 76

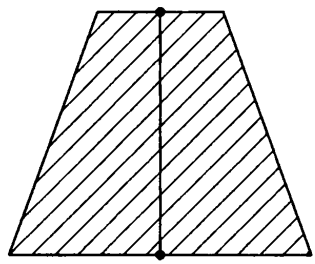
1 В усеченном конусе диагональ осевого сечения равна 10, радиус меньшего основания 3, высота 10. Найдите радиус большего основания.



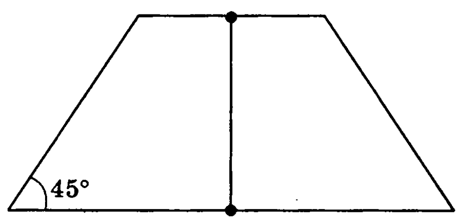
2 В усеченном конусе диагональ осевого сечения равна 10, радиусы оснований 2 и 4. Найдите высоту конуса.



3 Радиус одного основания усеченного конуса вдвое больше другого; боковая поверхность равна сумме площадей оснований; площадь осевого сечения равна 36. Найдите объем.

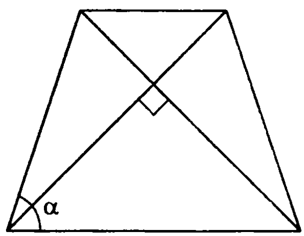


4 Высота усеченного конуса равна 3. Радиус одного основания вдвое больше другого, а образующая наклонена к основанию под углом в 45°. Найдите объем.

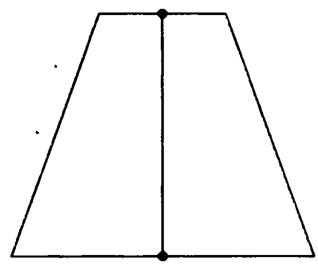


Окончание табл. 76

5 В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, длина каждой из них равна $\sqrt{(2+\sqrt{3})/\sqrt{2}}$. Угол между образующей и плоскостью основания равен 75°. Найдите полную поверхность усеченного конуса.



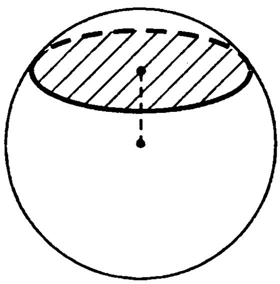
6 Радиусы оснований усеченного конуса и его образующая относятся как 1 : 4 : 5, высота равна 8. Найдите площадь боковой поверхности.



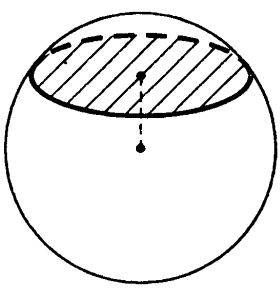
ШАР

Таблица 77

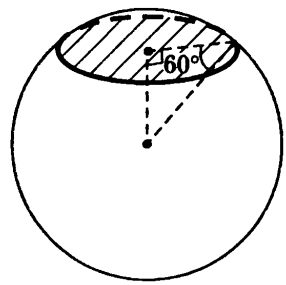
1 Площадь поверхности шара 64. На расстоянии $3/2\sqrt{\pi}$ от центра шара проведена плоскость. Найдите площадь полученного сечения.



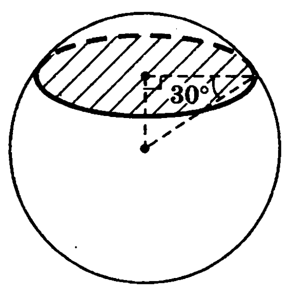
2 Площадь поверхности шара равна $37/\pi$. На расстоянии $1/2\pi$ от центра шара проведена плоскость. Найдите длину полученной в сечении окружности.



3 Дан шар радиуса $R = 8/\sqrt{\pi}$. Через конец радиуса проведена плоскость под углом 60° к нему. Найдите площадь сечения.



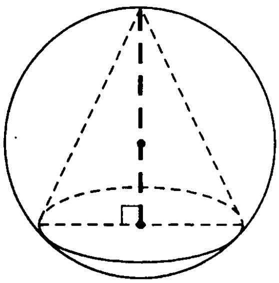
4 Дан шар радиуса $R = 12/\sqrt{\pi}$. Через конец радиуса проведена плоскость под углом 30° к нему. Найдите площадь сечения.



Окончание табл. 77

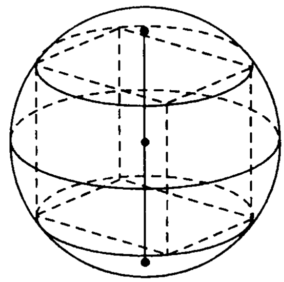
5

В шар вписан конус. Найдите высоту конуса, если радиус шара 5, а радиус основания конуса 4.



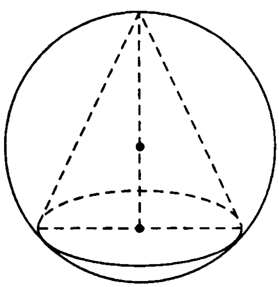
7

Около куба с ребром $2\sqrt{3}$ описан шар. Найдите объем этого шара, деленный на π.



6

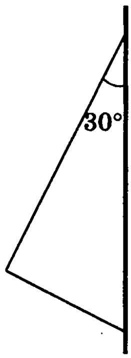
В шар вписан конус, образующая которого равна диаметру основания. Найдите отношение полной поверхности этого конуса к поверхности шара.



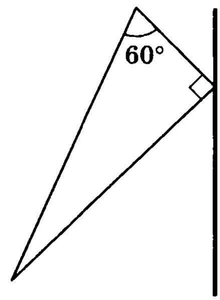
ТРЕУГОЛЬНИК

Таблица 78

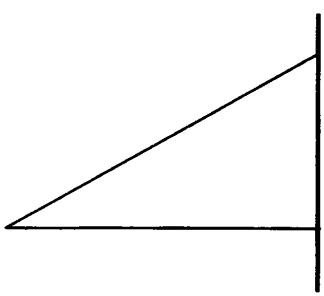
1 Прямоугольный треугольник с гипотенузой $10/\sqrt[3]{\pi}$ и острым углом 30° вращается вокруг гипотенузы. Найдите объем тела вращения.



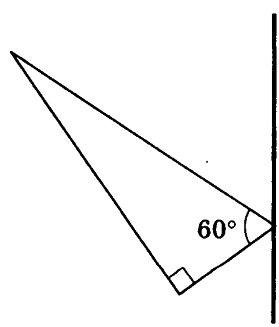
3 Прямоугольный треугольник с острым углом 60° и гипотенузой, равной 1, вращается вокруг биссектрисы внешнего прямого угла. Найдите объем тела вращения.



2 Прямоугольный треугольник с катетами $5/\sqrt{\pi}$ и $12/\sqrt{\pi}$ вращается вокруг меньшего катета. Найдите площадь полной поверхности тела вращения.

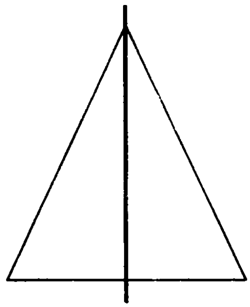


4 Прямоугольный треугольник с острым углом 60° и противолежащим катетом длиной 1 вращается вокруг прямой, лежащей в плоскости треугольника, проходящей через вершину данного угла и перпендикулярной его биссектрисе. Найдите объем тела вращения.

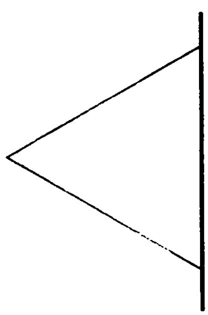


Продолжение табл. 78

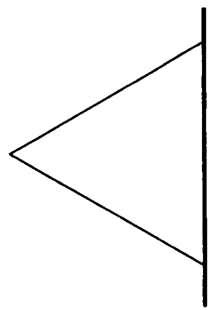
5 Равнобедренный треугольник с основанием $2\sqrt{3/\pi}$ и высотой $\frac{1}{2}\sqrt{15/\pi}$ вращается вокруг высоты. Найдите площадь полной поверхности тела вращения.



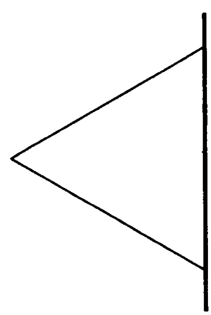
6 Равнобедренный треугольник с основанием $6/\pi$ и высотой $5\sqrt{2}$ вращается вокруг основания. Найдите объем тела вращения.



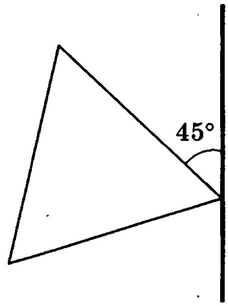
7 Равносторонний треугольник со стороной $\sqrt[3]{16/\pi}$ вращается вокруг одной из сторон. Найдите объем полученной фигуры вращения.



8 Равносторонний треугольник со стороной $a = 6/\sqrt[3]{\pi}$ вращается вокруг одной из сторон. Найдите объем полученной фигуры вращения.



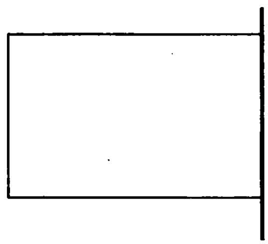
Окончание табл. 78

9	Правильный треугольник со стороной, равной 1, вращается вокруг прямой, проходящей через вершину треугольника и составляющей со стороной угол 45°. Найдите объем полученного тела вращения. 

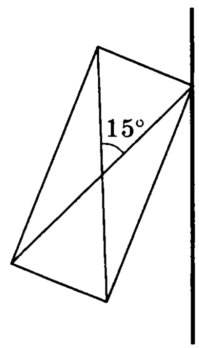
ПРЯМОУГОЛЬНИК

Таблица 79

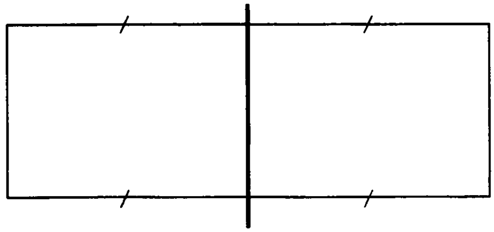
1 Прямоугольник со сторонами $\sqrt{5/\pi}$ и $\sqrt{125/\pi}$ вращается вокруг меньшей стороны. Найдите площадь полной поверхности тела вращения.



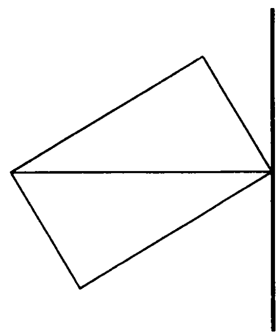
3 Прямоугольник, площадь которого равна 1, а угол между диагоналями равен 15°, вращается вокруг оси, проходящей через его вершину параллельно диагонали. Найдите поверхность тела вращения.



2 Прямоугольник со сторонами $2\sqrt{7/\pi}$ и $2\sqrt{1/7\pi}$ вращается вокруг прямой, проходящей через середины бо́льших сторон. Найдите площадь полной поверхности тела вращения.



4 Прямоугольник со сторонами 5 и 12 вращается вокруг перпендикуляра к диагонали, проведенного через ее конец. Найдите объем тела вращения.

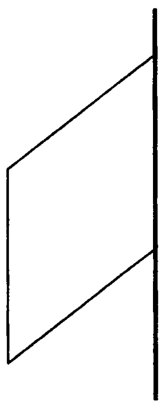


ПАРАЛЛЕЛОГРАММ И ТРАПЕЦИЯ

Таблица 80

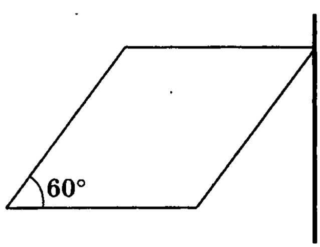
1

Ромб, площадь которого равна 13, вращается вокруг стороны. Определите поверхность полученного тела вращения.



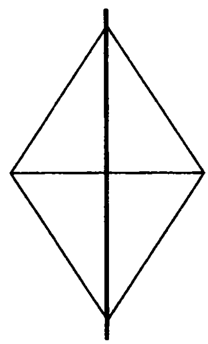
2

Ромб со стороной 7 и острым углом в 60° вращается вокруг оси, проведенной через вершину этого угла перпендикулярно к стороне. Определите поверхность тела вращения.



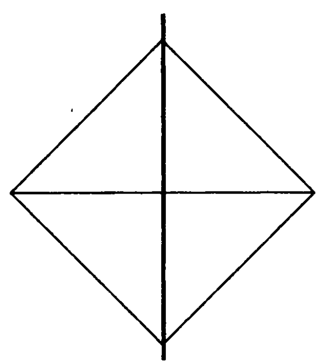
3

Ромб с диагоналями $\sqrt{15}$ и $120/\pi$ вращается вокруг большей диагонали. Найдите объем полученного тела вращения.

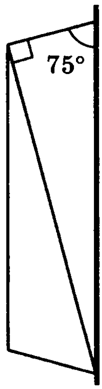
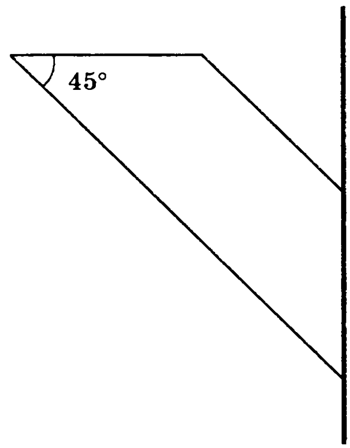


4

Квадрат со стороной $\sqrt[6]{81/2\pi^2}$ вращается вокруг диагонали. Найдите объем полученного тела вращения.



Окончание табл. 80

5 В равнобедренной трапеции с острым углом 75° большее основание равно 1, а диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите объем тела, полученного вращением трапеции вокруг ее большего основания. 	**6** Равнобедренная трапеция с острым углом в 45° вращается вокруг боковой стороны длиной 6, равной меньшему основанию. Найдите объем полученного тела вращения. 

ОТВЕТЫ

Таблица 1

1. $90°$. **2.** $90°$. **3.** $45°$. **4.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. **5.** $90°$. **6.** $60°$. **7.** $60°$. **8.** $60°$. **9.** $60°$. **10.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. **11.** $60°$. **12.** $90°$. **13.** $60°$. **14.** $90°$. **15.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. **16.** $60°$. **17.** $90°$. **18.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

Таблица 2

1. $60°$. **2.** $45°$. **3.** $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$. **4.** $\arccos\frac{1}{4}$. **5.** $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$. **6.** $\arccos\frac{1}{4}$. **7.** $\arccos 0{,}7$. **8.** $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$. **9.** $\arccos\frac{1}{4}$.

Таблица 3

1. $90°$. **2.** $45°$. **3.** $45°$. **4.** $60°$. **5.** 60. **6.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$. **7.** $\arccos\frac{5\sqrt{2}}{8}$. **8.** $\arccos\frac{1}{4}$. **9.** $\arccos\frac{3}{4}$. **10.** $\arccos\frac{\sqrt{2}}{8}$. **11.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$. **12.** $90°$. **13.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$. **14.** $90°$. **15.** $\arccos\frac{\sqrt{5}}{10}$. **16.** $\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$. **17.** $\arccos\frac{1}{5}$. **18.** $\arccos\frac{1}{8}$. **19.** $\arccos\frac{1}{5}$. **20.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$. **21.** $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$. **22.** $\arccos\frac{3}{4}$. **23.** $\arccos\frac{3}{4}$. **24.** $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$. **25.** $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Таблица 4

1. $90°$. **2.** $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$. **3.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Таблица 5

1. $\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$. **2.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

Таблица 6

1. $30°$. **2.** $60°$. **3.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **4.** $\frac{1}{4}$. **5.** $60°$.

Таблица 7

1. $45°$. **2.** $30°$. **3.** $30°$. **4.** $45°$. **5.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$. **6.** $0°$. **7.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **8.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$. **9.** $0°$. **10.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$. **11.** $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. **12.** $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. **13.** $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. **14.** $30°$. **15.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Таблица 8

1. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. **2.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** $60°$. **4.** $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$. **5.** $\arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}$. **6.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Таблица 9

1. $90°$. **2.** $45°$. **3.** $30°$. **4.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. **5.** $60°$. **6.** $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$. **7.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. **8.** $45°$. **9.** $\arcsin\frac{3}{\sqrt{42}}$. **10.** $\operatorname{arctg} 1{,}5$. **11.** $\arcsin\frac{4}{\sqrt{26}}$. **12.** $\arcsin\frac{3}{4}$. **13.** $60°$. **14.** $45°$. **15.** $60°$. **16.** $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$. **17.** $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Таблица 10

1. $\arccos\frac{1}{3}$. 2. $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. 3. $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$. 4. $\arccos\frac{\sqrt{7}}{3}$.

Таблица 11

1. $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$. 2. $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. 3. $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Таблица 12

1. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. 2. $\frac{3}{\sqrt{15}}$. 3. $\frac{\sqrt{15}}{10}$.

Таблица 13

1. 90°. 2. 90°. 3. 90°. 4. 45°. 5. $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. 6. $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. 7. 90°. 8. 60.
9. $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. 10. $\arccos\frac{1}{3}$. 11. $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. 12. 60°. 13. $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Таблица 14

1. 60°. 2. 90°. 3. $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}$. 4. $\arccos\frac{1}{7}$. 5. $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Таблица 15

1. 60°. 2. 120°. 3. 90°. 4. 90°. 5. 60°. 6. 30°. 7. 30°. 8. 45°. 9. $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}$.
10. $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}$. 11. $\arccos\frac{1}{7}$. 12. $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$. 13. $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$. 14. 60°. 15. 30°. 16. 45°.

Таблица 16

1. $\arccos\frac{1}{3}$. **2.** $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$. **3.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. **4.** $45°$.

Таблица 17

1. 0,2. **2.** 0,6. **3.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Таблица 18

1. 1. **2.** $\sqrt{2}$. **3.** 1. **4.** $\sqrt{2}$. **5.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **6.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **7.** 1. **8.** $\sqrt{2}$. **9.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **10.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **11.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **12.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **13.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Таблица 19

1. 1. **2.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **4.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **5.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **6.** $\frac{\sqrt{14}}{4}$. **7.** $\frac{\sqrt{14}}{4}$.

Таблица 20

1. 1. **2.** $\sqrt{3}$. **3.** 2. **4.** $\sqrt{3}$. **5.** $\sqrt{3}$. **6.** 1. **7.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **8.** 1. **9.** $\frac{1}{2}$. **10.** $\frac{3}{2}$. **11.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **12.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **13.** 2. **14.** 2. **15.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **16.** $\frac{\sqrt{14}}{4}$. **17.** $\sqrt{3}$. **18.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **19.** 1. **20.** $\frac{\sqrt{30}}{5}$. **21.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **22.** $\frac{\sqrt{39}}{4}$. **23.** $\sqrt{2}$. **24.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **25.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **26.** $\sqrt{3}$. **27.** $\frac{\sqrt{30}}{5}$. **28.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **29.** 2.

Таблица 21

1. $\frac{\sqrt{15}}{4}$. **2.** $\frac{\sqrt{13}}{2}$. **3.** $\sqrt{3}$. **4.** $\frac{\sqrt{39}}{4}$. **5.** $\frac{\sqrt{42}}{4}$.

Таблица 22

1. 1. 2. 1. 3. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 4. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 5. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 6. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 7. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 8. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 9. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. 10. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
11. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. 12. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 13. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Таблица 23

1. 1. 2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 3. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. 4. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. 5. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. 6. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. 7. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. 8. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Таблица 24

1. 1. 2. $\sqrt{3}$. 3. $\sqrt{3}$. 4. 1. 5. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 6. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 7. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 8. $\frac{1}{2}$. 9. $\frac{3}{2}$. 10. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 11. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.
12. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 13. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. 14. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. 15. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Таблица 25

1. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 2. $\frac{1}{2}$.

Таблица 26

1. $\frac{2\sqrt{15}}{5}$. 2. $\frac{9}{\sqrt{39}}$. 3. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. 4. $\frac{3}{\sqrt{39}}$.

Таблица 27

1. 1. 2. 1. 3. 1. 4. $\sqrt{2}$. 5. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 6. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 7. 1. 8. 1. 9. 1. 10. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 11. $\frac{1}{\sqrt{6}}$.
12. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 13. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 14. $\frac{1}{\sqrt{6}}$. 15. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Таблица 28

1. 1. **2.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **4.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **5.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **6.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **7.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **8.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **9.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Таблица 29

1. 1. **2.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** $\sqrt{3}$. **4.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.** $\sqrt{3}$. **6.** $\sqrt{3}$. **7.** $\sqrt{3}$. **8.** $\frac{3}{2}$. **9.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **10.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **11.** $\sqrt{3}$. **12.** $\frac{\sqrt{30}}{10}$. **13.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Таблица 30

1. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **2.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **3.** $\frac{1}{2}$. **4.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

Таблица 31

1. $\frac{6}{\sqrt{39}}$. **2.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Таблица 32

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **2.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **3.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **4.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **5.** $\frac{7\sqrt{17}}{24}$. **6.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **7.** $\frac{3\sqrt{21}}{16}$. **8.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **9.** $\frac{9}{8}$. **10.** $\frac{9}{8}$. **11.** $\frac{9}{8}$. **12.** $\sqrt{2}$. **13.** $\frac{27\sqrt{6}}{50}$. **14.** $\frac{3\sqrt{114}}{25}$. **15.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **16.** $\frac{21}{16}$.

Таблица 33

1. $\sqrt{5}$. **2.** $\sqrt{2}$. **3.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **4.** $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Таблица 34

1. 0,5. **2.** $\frac{3\sqrt{19}}{16}$. **3.** $\frac{3\sqrt{7}}{16}$. **4.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.** $\frac{3\sqrt{19}}{16}$. **6.** $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Таблица 35

1. 2. **2.** $\sqrt{6}$. **3.** 3. **4.** $\sqrt{6}$. **5.** $\frac{3\sqrt{7}}{4}$. **6.** $\frac{3\sqrt{7}}{4}$.

Таблица 36

1. 0,25. **2.** $\frac{\sqrt{3}}{16}$. **3.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **4.** $\frac{\sqrt{11}}{16}$.

Таблица 37

1. 0,5. **2.** $\frac{3\sqrt{11}}{16}$. **3.** $\frac{3\sqrt{11}}{16}$. **4.** $\frac{3\sqrt{3}}{16}$. **5.** 0,5.

Таблица 38

1. $12\sqrt{2}$. **2.** $12\sqrt{2}$. **3.** $4\sqrt{5}$. **4.** $8\sqrt{5}$. **5.** $6\sqrt{3}$. **6.** 12. **7.** $2\sqrt{5}$. **8.** $12\sqrt{2}$. **9.** $8\sqrt{5}$. **10.** $8\sqrt{13}$.

Таблица 39

1. 2π. **2.** $\sqrt{2}\pi$. **3.** $4\sqrt{2}\pi$. **4.** 12π.

Таблица 40

1. 4π. **2.** 4π. **3.** $\frac{24\pi}{\sqrt{5}}$. **4.** $6\sqrt{5}\pi$.

Таблица 41

1. $\sqrt{2}\,\pi$. **2.** $\sqrt{2}\,\pi$. **3.** $2\sqrt{5}\,\pi$. **4.** $\frac{6\pi}{\sqrt{5}}$. **5.** 270π. **6.** 1440π.

Таблица 42

1. 14π. **2.** $26{,}4\pi$. **3.** 40π. **4.** 25π. **5.** $\frac{3\pi}{4}$. **6.** $\sqrt{3}\,\pi$.

Таблица 43

1. 4π. **2.** $\sqrt{3}\,\pi$. **3.** π. **4.** 6π.

Таблица 44

1. 4π. **2.** 3π. **3.** 3π.

Таблица 45

1. 12π. **2.** 6π.

Таблица 46

1. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **2.** 3π.

Таблица 47

1. 2π. **2.** π. **3.** $\frac{8\pi}{\sqrt{5}}$. **4.** $2\sqrt{5}\,\pi$.

Таблица 48

1. $\frac{\pi}{3}$. **2.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$. **3.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{12}$. **4.** $\frac{4}{3}\pi$. **5.** $\frac{4\sqrt{5}\pi}{15}$. **6.** 280π. **7.** 3400π.

Таблица 49

1. $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$. 2. 12π. 3. $\frac{192\pi}{5}$. 4. 32π. 5. $\frac{\sqrt{3}\pi}{24}$. 6. $\frac{\pi}{4}$. 7. $\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$. 8. $\frac{3\sqrt{3}\pi}{4}$.

Таблица 50

1. π. 2. $\frac{5\pi}{4}$. 3. $\frac{4\pi}{3}$. 4. $\frac{7\pi}{3}$. 5. $\frac{7\pi}{3}$. 6. $\frac{5\pi}{3}$.

Таблица 51

1. $\frac{\pi}{4}$. 2. $\frac{\pi}{4}$. 3. $\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$. 4. $\frac{3\sqrt{3}\pi}{4}$.

Таблица 52

1. 9π. 2. $\frac{73\sqrt{3}\pi}{12}$.

Таблица 53

1. 7π. 2. 5π.

Таблица 54

1. $\frac{4\pi}{3}$. 2. $\frac{5\pi}{3}$. 3. $\frac{4\pi}{3}$.

Таблица 55

1. 2π. 2. $\frac{\pi}{2}$.

Таблица 56

1. π. 2. $\frac{\pi}{3}$.

Таблица 57

1. $\frac{\sqrt{2}\pi}{12}$. 2. $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$.

Таблица 58

1. $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$.

Таблица 59

1. 80π. **2.** 104π.

Таблица 60

1. 125. **2.** 4. **3.** 4. **4.** 108. **5.** 5. **6.** 4. **7.** 4. **8.** 6. **9.** 512. **10.** 98. **11.** $2\sqrt{2}$. **12.** 2. **13.** $\frac{8}{\sqrt{3}}$.

Таблица 61

1. 61. **2.** 5. **3.** 45°. **4.** 45°. **5.** 4. **6.** 320. **7.** $\frac{\sqrt{2}}{8}$. **8.** arctg 7. **9.** 4. **10.** 69. **11.** 10. **12.** $\operatorname{arctg}\frac{15}{4}$. **13.** $2\sqrt{3}$. **14.** 2. **15.** 10. **16.** 3.

Таблица 62

1. 4. **2.** 4. **3.** 1. **4.** 3. **5.** $2\sqrt[3]{3}$. **6.** 2,5. **7.** $\frac{\sqrt[4]{6}}{2}$. **8.** 4. **9.** arctg 0,6. **10.** 45°. **11.** 2. **12.** 13. **13.** $\frac{\sqrt{17}}{4}$.

Таблица 63

1. $192 + 32\sqrt{6}$. **2.** 6 и 3 или 4 и 7. **3.** $\sqrt{2}$. **4.** $\sqrt[3]{\frac{\sin\alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}}$. **5.** 22. **6.** 9. **7.** $\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$. **8.** $\sqrt[6]{2}$.

Таблица 64

1. 2. **2.** 60°. **3.** 26. **4.** 10. **5.** $\sqrt{91}$. **6.** 72. **7.** 180. **8.** $\frac{3\sqrt{15}}{50}$.

Таблица 65

1. 21. 2. 18. 3. 8. 4. 5. 5. $\frac{\sqrt{105}}{27}$. 6. 2. 7. 144. 8. 192. 9. 81. 10. $6\sqrt{3}$. 11. 3. 12. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{23}}{5}$. 13. $\frac{4\sqrt{11}}{7}$. 14. $\frac{4}{\sqrt{23}}$. 15. $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. 16. $\frac{\sqrt{2}}{6}$. 17. 3. 18. $\frac{\sqrt{6}}{8}$. 19. $\frac{13\sqrt{13}}{8}$. 20. $\frac{13\sqrt{39}}{12}$. 21. 24. 22. $\frac{\sqrt{57}}{6}$.

Таблица 66

1. $\frac{\sqrt{6}}{4}$. 2. 4. 3. $\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{2}}{11}$. 4. 3,4.

Таблица 67

1. $\operatorname{arctg}\frac{1}{8}$. 2. $\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$. 3. 12. 4. 3. 5. 36. 6. 20. 7. $\frac{\sqrt{3}}{48}$. 8. $\frac{\sqrt{6}}{12}(\sqrt{3}+1)$.

Таблица 68

1. 9,5. 2. 109. 3. $\frac{7\sqrt{3}}{12}$. 4. 54.

Таблица 69

1. 13. 2. 8. 3. 32. 4. 48. 5. 540. 6. $\frac{\sqrt{3}}{12}$. 7. $\frac{2}{3}$. 8. $\frac{\sqrt{23}}{6}$. 9. 1. 10. $\frac{\sqrt[4]{3}}{2}$. 11. $\frac{2}{3}$. 12. 384. 13. 324. 14. $\frac{\sqrt{3}}{12}$. 15. 1. 16. $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Таблица 70

1. $\frac{\sqrt{2}}{12}$. 2. 9. 3. 26. 4. 768.

Таблица 71

1. 98. **2.** 13. **3.** 872. **4.** 342. **5.** $\frac{7\sqrt{2}}{6}$. **6.** $\frac{7\sqrt{2}}{6}$. **7.** $\frac{14}{9}$. **8.** 2 и 8.

Таблица 72

1. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **2.** $\frac{3\sqrt{39}}{2}$. **3.** 6. **4.** 384. **5.** 1.

Таблица 73

1. 298. **2.** 294. **3.** 66. **4.** 116. **5.** 31. **6.** 129. **7.** 21. **8.** 41. **9.** 7. **10.** 5.

Таблица 74

1. 9. **2.** 5. **3.** 6. **4.** 3. **5.** 27. **6.** 9. **7.** 175. **8.** 5. **9.** 225. **10.** 36. **11.** 50. **12.** 0,25.

Таблица 75

1. 17. **2.** 45. **3.** 42. **4.** 507. **5.** 27. **6.** 72. **7.** 2,4. **8.** 0,25. **9.** $\sqrt[3]{\pi^2-1}$. **10.** π. **11.** 9π. **12.** 3. **13.** 500. **14.** $100\sqrt{2}$. **15.** 30. **16.** 220,5.

Таблица 76

1. 5. **2.** 8. **3.** 84π. **4.** 63π. **5.** $\pi\sqrt{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})}$. **6.** 100π.

Таблица 77

1. 13,75. **2.** 6. **3.** 16. **4.** 108. **5.** 8. **6.** 0,5625. **7.** 36.

Таблица 78

1. 12,5. **2.** 300. **3.** $\frac{\pi\sqrt{6}}{48}(\sqrt{3}+1)$. **4.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. **5.** 7,5. **6.** 100. **7.** 4. **8.** 54. **9.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{8}(\sqrt{3}+1)$.

Таблица 79

1. 72. **2.** 18. **3.** $2\pi(\sqrt{3}+1)$. **4.** 780π.

Таблица 80

1. 52π. **2.** 294π. **3.** 150. **4.** 1,5. **5.** $\frac{\pi}{48}(\sqrt{3}+1)$. **6.** $36\pi(5+3\sqrt{2})$.

Раздел IV

РЕШЕНИЯ НАИБОЛЕЕ ТРУДНЫХ ЗАДАЧ

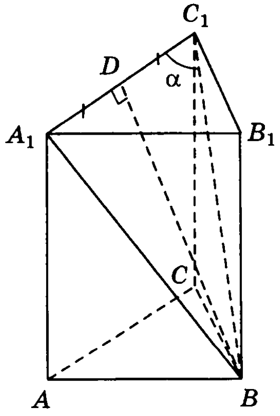
§ 1. Угол между двумя прямыми

К таблице 1

4. Заметим, что угол между прямыми BB_1 и A_1C равен углу между прямыми AA_1 и A_1C. Пусть $\angle AA_1C = \alpha$, тогда из ΔA_1AC ($\angle A_1AC = 90°$) имеем $\cos\alpha = \dfrac{AA_1}{A_1C}$, где $AA_1 = 1$, A_1C — диагональ куба. По свойству прямоугольного параллелепипеда, имеем: $A_1C^2 = AB^2 + BC^2 + AA_1^2$, или $A_1C = \sqrt{a^2+a^2+a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3} = \sqrt{3}$, где а = 1. Тогда $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, откуда $\alpha = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

К таблице 2



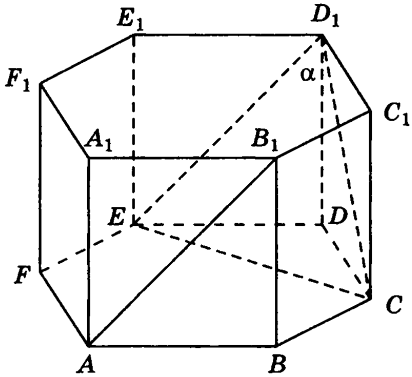
3. Угол между прямыми AC и BC_1 равен углу между прямыми BC_1 и A_1C_1. Пусть $\angle A_1C_1B = \alpha$. Так как призма правильная, то $A_1B = C_1B$ как диагонали равных квадратов (по условию все ребра призмы равны 1). Значит, ΔA_1BC_1 — равнобедренный. Проведем высоту BD. В ΔBDC_1 $DC_1 = \dfrac{1}{2}A_1C_1 = \dfrac{1}{2}$.

Из ΔC_1B_1B $BC_1^2 = 1 + 1 = 2$; $BC_1 = \sqrt{2}$.

Тогда $\cos\alpha = \dfrac{DC_1}{BC_1} = \dfrac{1/2}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $\alpha = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

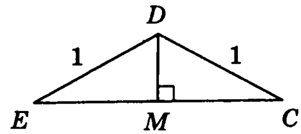
Ответ: $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

К таблице 3



8. Угол между прямыми AB_1 и D_1C равен углу $CD_1E = \alpha$. Так как $D_1E = D_1C$ (как диагонали равных квадратов), то ΔED_1C равнобедренный.

Из ΔEDD_1 $ED_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Сторону CE найдем из ΔDEC, где $DE = DC = 1$, $\angle EDC = 180° \cdot (6-2) : 6 = 120°$ (см. на плане), тогда $\angle EDM = 60°$.



Из ΔEMD $ME = DE \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

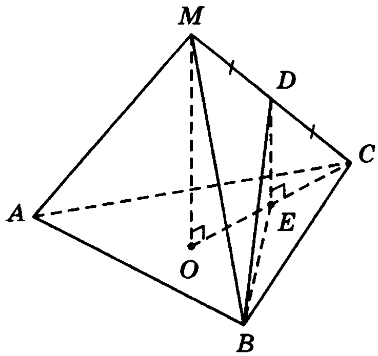
тогда $EC = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Из ΔED_1C по теореме косинусов имеем:
$CE^2 = D_1E^2 + D_1C^2 - 2 \cdot D_1E \cdot D_1C \cos\alpha$, или $3 = 2 + 2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cos\alpha$, или

$4\cos\alpha = 1$, откуда $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$, тогда $\alpha = \arccos\dfrac{1}{4}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{1}{4}$.

К таблице 4



2. Так как BD — медиана боковой грани MBC, то $MD = DC = \dfrac{1}{2}a$, где a — ребро правильного тетраэдра.

Из точки D опустим перпендикуляр DE на плоскость основания ABC, тогда $OE = EC$ — по теореме Фалеса. Так как $AB = a = R\sqrt{3}$, то $OC = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Высоту MO тетраэдра найдем из ΔMOC: $MO = \sqrt{MC^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

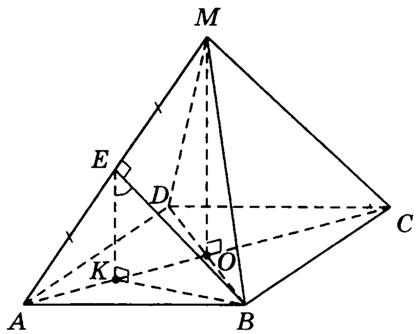
$DE = \dfrac{1}{2}MO = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,a = \dfrac{a}{\sqrt{6}}$ (средняя линия ΔMOC). $BE = \dfrac{1}{2}BC\sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Пусть $\angle BDE = \alpha$ — угол между высотой и медианой BD, тогда $\cos\alpha =$ $= \frac{DE}{BD} = \frac{a}{\sqrt{6}} : BD$. $BD = \sqrt{BM^2 - MD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, значит,

$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{6}} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$, откуда $\alpha = \arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$.

К таблице 5



1. Из точки E — середины AM опустим перпендикуляр EK на плоскость основания $ABCD$. EK — средняя линия ΔAOM. Так как высота $MO \perp (ABC)$ и $MO \parallel EK$, то $EK \perp (ABC)$, значит, $EK \perp BK$. Поскольку $MO \parallel EK$, то угол между прямыми MO и медианой BE равен $\angle KEB = \alpha$. Поскольку все ребра пирамиды равны 1 (по условию), то из ΔABE, где $AB = 1$, $AE = \frac{1}{2}$,

$BE = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

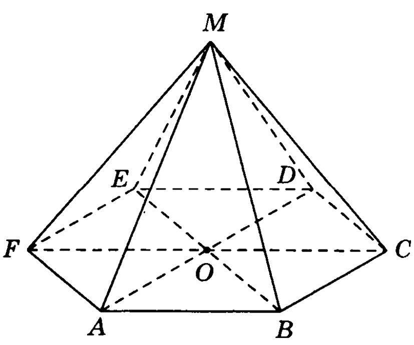
В ΔAOM $AO = MO$, тогда $AO^2 + MO^2 = AM^2$, или $2AO^2 = 1$, $AO^2 = \frac{1}{2}$, $AO = MO = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $KE = \frac{1}{2}MO = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Теперь найдем искомый угол из ΔEKM:

$\cos\alpha = \frac{KE}{BE} = \frac{1}{2\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$, тогда $\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Ответ: $\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$.

К таблице 6

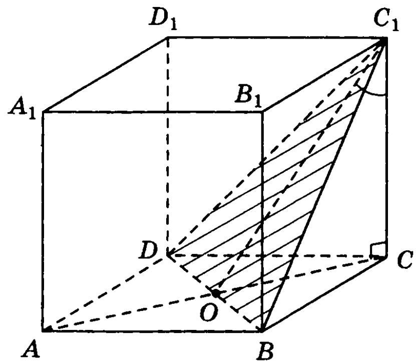


5. Известно, что в правильном шестиугольнике $a = R$, где a — сторона правильного шестиугольника, $R = AO = BO = EO = OF = OC$ — радиус описанной окружности. По условию $AB = 1$, $MA = 2$. Угол между прямыми ME и CD равен углу между ME и BE. Но $ME = MB = BE = 2$, значит, ΔMEB — правильный и $\angle MEB = 60°$.

Ответ: 60°.

§ 2. Угол между прямой и плоскостью

К таблице 7



15. Угол между прямой AA_1 и плоскостью BC_1D равен углу между прямой CC_1 и плоскостью BC_1D, т. е. $\angle OC_1C$.

В ΔOCC_1 $CC_1 = 1$, $OC = R$ — радиус описанной окружности. Известно, что в правильном четырехугольнике со стороной a $a = R\sqrt{2}$, откуда $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$, или $OC = \frac{1}{\sqrt{2}}$, где $a = 1$.

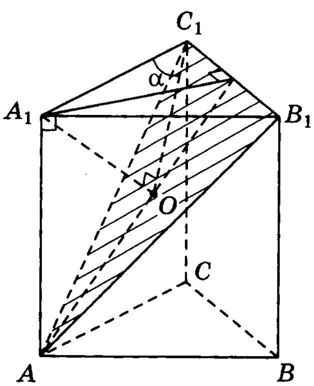
Из прямоугольного ΔOCC_1

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OC}{CC_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, где $\alpha = \angle OC_1C$, тогда

$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$.

К таблице 8



5. Угол между прямой AC и плоскостью AB_1C_1 равен $\angle A_1C_1O = \alpha$, где точка O — основание перпендикуляра, опущенного из точки A_1 на плоскость AB_1C_1. Так как $AA_1 \perp (A_1B_1C_1)$, то $AA_1 \perp A_1D_1$. Катет A_1D_1 найдем из прямоугольного $\Delta A_1D_1C_1$, где $A_1C_1 = 1$, $C_1D_1 = \frac{1}{2}C_1B_1 = \frac{1}{2}$;

$$A_1D_1 = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Из ΔAA_1D_1 найдем гипотенузу AD_1:

$$AD_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1D_1^2},\ AD_1 = \sqrt{1 + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

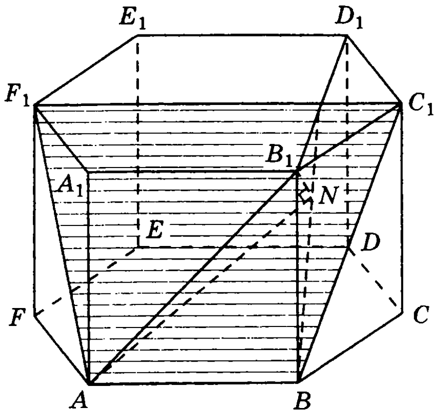
Заметим, что $\Delta A_1OD_1 \sim \Delta AA_1D_1$ (как прямоугольные, имеющие общий острый угол A_1AO).

Имеем: $\frac{A_1O}{A_1D_1} = \frac{AA_1}{AD_1}$, откуда $A_1O = \frac{A_1D_1 \cdot AA_1}{AD_1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Из прямоугольного ΔA_1OC_1, где катет $A_1O = \frac{\sqrt{21}}{7}$, гипотенуза $A_1C_1 = 1$, находим искомый угол: $\sin\alpha = \frac{A_1O}{A_1C_1} = \frac{\sqrt{21}}{7}$, откуда $\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}$.

К таблице 9

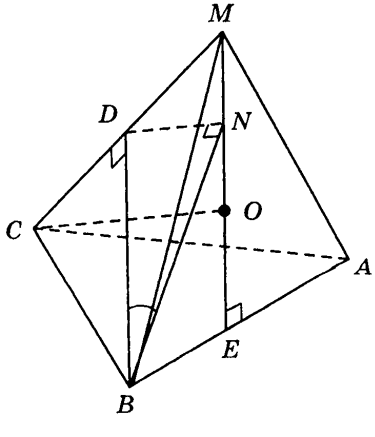


9. Обозначим точку M — пересечение прямых F_1C_1 и B_1D_1. Далее, из точки B_1 опустим перпендикуляр B_1N на прямую BM. Тогда $\angle B_1AN = \alpha$ — искомый угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1. В прямоугольном ΔBB_1M известно: $BB_1 = 1$ (по условию), $B_1M = \frac{1}{2}B_1D_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (см. № 8, табл. 3), тогда $BM = \sqrt{BB_1^2 + B_1M^2}$, $BM = \sqrt{1+\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Заметим, что $\Delta B_1NM \sim \Delta BB_1M$ (как прямоугольные, имеющие общий угол B_1MN), тогда имеем $B_1N = \frac{\sqrt{21}}{7}$ (см. № 5). Так как $AB_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, то из ΔAB_1N $\sin\alpha = B_1N{:}AB_1 = \frac{\sqrt{42}}{14}$, тогда $\alpha = \arcsin\frac{3}{\sqrt{42}}$.

Ответ: $\arcsin\frac{3}{\sqrt{42}}$.

К таблице 10



4. Пусть в правильном тетраэдре $MABC$ $AB = 1$, ME — апофема грани MAB, O — центр правильного ΔMAB. Так как $BD = ME$ как высоты правильных треугольников, то DN — средняя линия ΔMOC, тогда $CO \perp (MAB)$, $CO \parallel DN$, значит, $DN \perp (MAB)$ и $\angle DBN = \alpha$ — искомый.

Поскольку $OE = ON = NM$ (N — середина MO), то $EN = \frac{2}{3}ME$. Из ΔAEM, где $AM = 1$,

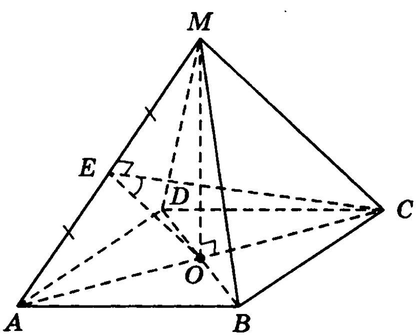
$AE = \frac{1}{2}$, $ME = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, тогда $EN = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Сторону BN найдем из прямоугольного ΔBEN: $BN = \sqrt{BE^2 + EN^2}$, $BN = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{12}}$.

Наконец, из ΔBND найдем искомый угол:
$\cos\alpha = \frac{BN}{BD} = \sqrt{\frac{7}{12}} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{7}}{6} = \frac{\sqrt{7}}{3}$, откуда $\alpha = \arccos\frac{\sqrt{7}}{3}$.

Ответ: $\alpha = \text{acrcos}\frac{\sqrt{7}}{3}$.

К таблице 11

3. Пусть E — середина ребра AM. Так как диагонали AC и BD квадрата перпендикулярны и $MO \perp AC$, то плоскость $(MBD) \perp AC$. Значит, плоскость (MBD) и есть плоскость, проходящая через точку D перпендикулярно AC. Соединим точку E с точками O и C. Поскольку ΔMDC правильный, то $AM \perp CE$. В ΔAOM OE — медиана и высота, тогда $OE \perp AM$. Следовательно, $\angle OEC = \alpha$ — искомый угол.



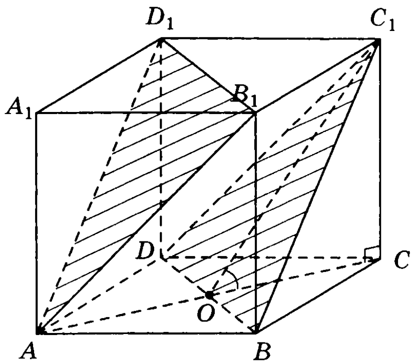
Из ΔABC $AC = \sqrt{2}$, тогда $OC = \frac{\sqrt{2}}{2}$; из ΔAOE, где $AO = OC = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $AE = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{2}$, найдем $OE = \sqrt{AO^2 - AE^2}$, или $OE = \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$; из ΔECM $CE = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Наконец, из ΔOEC по теореме косинусов имеем $OC^2 = OE^2 + CE^2 - 2\cdot OE\cdot CE\cdot\cos\alpha$, или $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\alpha$, $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, откуда $\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

§ 3. Угол между двумя плоскостями

К таблице 13



6. Очевидно, что в единичном кубе $A...D_1$ плоскость $AB_1D_1 \parallel$ плоскости BC_1D, так как $BD = B_1D_1, AB_1 = DC_1$ и $AD_1 = BC_1$.

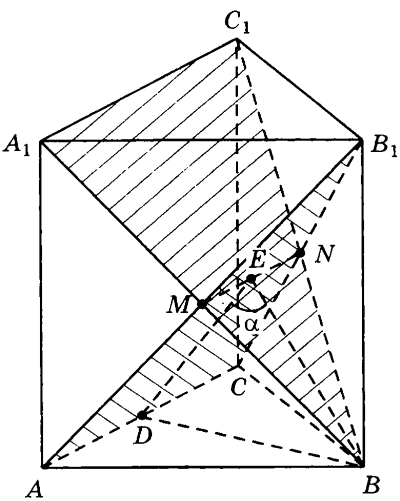
Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD квадрата $ABCD$. Тогда искомым линейным углом α между плоскостью ABC и плоскостью BC_1D будет $\angle C_1OC = \alpha$.

В прямоугольном ΔC_1OC ($\angle C = 90°$), $CC_1 = 1$, $OC = R = \frac{1}{\sqrt{2}}$, тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{CC_1}{OC} = \sqrt{2},\ \alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{2}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

К таблице 14



4. Плоскости AB_1C и A_1BC_1 пересекаются по прямой MN. Пусть E — середина MN и D — середина BD, тогда $\angle BED = \alpha$ — искомый.

Из ΔBDC, где $\angle D = 90°$, $BC = 1$ и $CD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}$, найдем BD:

$$BD = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Так как $\Delta AB_1C = \Delta BA_1C_1$ (по трем сторонам), то $BE = DE$, $MN = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}A_1C_1 = \frac{1}{2}$,

$$ME = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{4},\ MB = \frac{1}{2}A_1B = \frac{1}{2}\sqrt{1+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

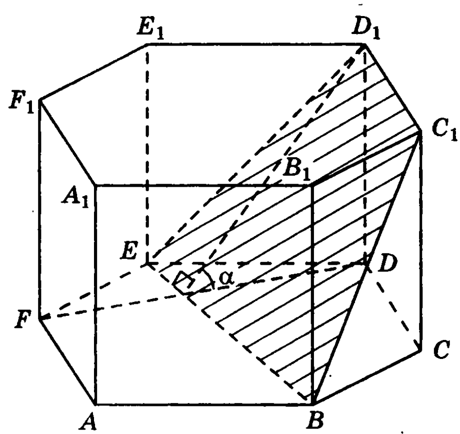
Из ΔBME $BE = \sqrt{MB^2 - ME^2}$, или $BE = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Из ΔBDE по теореме косинусов имеем $BD^2 = DE^2 + BE^2 - 2 \cdot DE \cdot BE \cdot \cos\alpha$, или

$\frac{3}{4}=\frac{7}{16}+\frac{7}{16}-2\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\cos\alpha$, $\frac{3}{4}=\frac{7}{8}-\frac{7}{8}\cdot\cos\alpha$, $\cos\alpha=\frac{1}{7}$, откуда $\alpha=\arccos\frac{1}{7}$.

Ответ: $\arccos\frac{1}{7}$.

К таблице 15

10. В плоскости BED_1 из точки D_1 опустим перпендикуляр D_1M на плоскость основания призмы. Так как $FE = ED$ и диагональ BE проходит через центр основания, то EM — медиана, биссектриса и высота ΔFED, тогда M — середина FD.



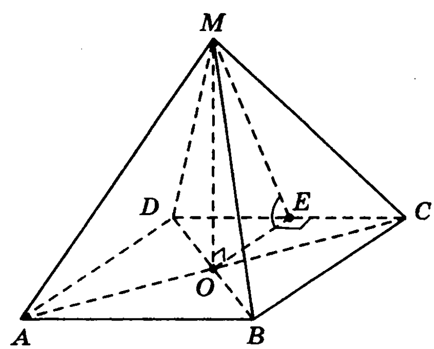
В прямоугольном ΔMDD_1 имеем: $DD_1 = 1$, $MD = \frac{1}{2}FD=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (см. № 8, табл. 3), тогда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{DD_1}{MD}$, или $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}/2}=\frac{2}{\sqrt{3}}$, откуда $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}$.

К таблице 16

3. В плоскости боковой грани MDC проведем высоту ME. Так как все ребра пирамиды равны 1, то ΔMDC — правильный. Из ΔMEC, где $MC = 1$, $CE = \frac{1}{2}$,

$$ME = \sqrt{MC^2-CE^2} = \sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



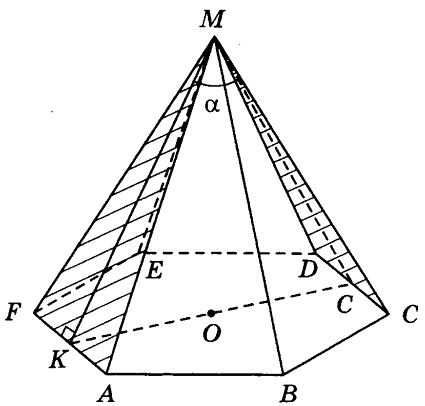
Из точки O — пересечения диагоналей основания проведем высоту OE, тогда $\angle OEM = \alpha$ — искомый угол между плоскостями ABC и MCD.

$OE = \frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}$ — средняя линия ΔADC.

В ΔMOE $\cos\alpha = \dfrac{OE}{ME} = \dfrac{1}{2} : \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, откуда $\alpha = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

К таблице 17



2. Так как пирамида правильная, то грани MAF и MDC равные равнобедренные треугольники, боковые ребра которых равны 2, а основания по 1.

Тогда $\angle KMP$ — искомый угол между плоскостями. Апофему (высоту) MK найдем из прямоугольного ΔAMK, где $AM = 2$, $AK = \dfrac{1}{2}AF = \dfrac{1}{2}\cdot 1 = \dfrac{1}{2}$, тогда

$$MK = \sqrt{2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Известно, что в правильном шестиугольнике $a = R$, где а $= AB = 1$, $R = AO = AB = 1$, тогда из ΔAOK $OK = \sqrt{AO^2 - AK^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, значит, $KP = \sqrt{3}$, следовательно, из ΔKMC по теореме косинусов имеем:

$KP^2 = MK^2 + MP^2 - 2 \cdot MK \cdot MP \cos\alpha$, где $\alpha = \angle KMC$.

$3 = \dfrac{15}{4} + \dfrac{15}{4} - 2\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{2}\cos\alpha$, или $15\cos\alpha = 9$, $\cos\alpha = 0{,}6$.

Ответ: 0,6.

§ 4. Расстояние от точки до прямой

К таблице 18

11. Расстояние от точки A до прямой BD_1 есть длина перпендикуляра AE.

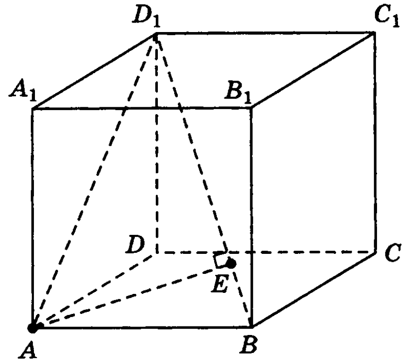
Так как $A...D_1$ единичный куб, то длины всех ребер равны 1. Применим метод сравнения площадей.

$S_{\Delta DAB} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AD_1 = \dfrac{1}{2}BD_1 \cdot AE$, откуда

$AE = \dfrac{AB \cdot AD_1}{BD_1}$, где $AB = 1$,

$AD_1 = \sqrt{AD^2 + DD_1^2} = \sqrt{2}$,

$BD_1^2 = AB^2 + BC^2 + AA_1^2$ (по свойству прямоугольного параллелепипеда), $BD_1 = \sqrt{3}$, тогда $AE = \dfrac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

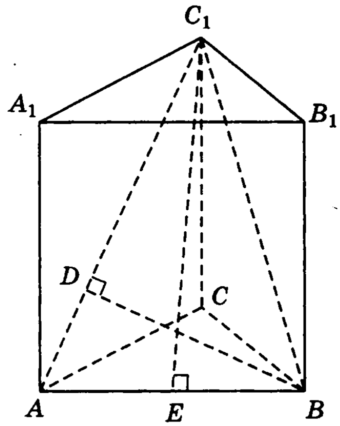


Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Замечание. Задачу можно решить другими способами.

К таблице 19

6. Расстояние от точки B до прямой AC_1 есть длина перпендикуляра BD. Проведем диагональ BC_1 боковой грани, а из точки C_1 проведем высоту C_1E равнобедренного ΔAC_1B.



Применим метод сравнения площадей.

$S_{\Delta AC_1B} = \dfrac{1}{2}AC_1 \cdot BD = \dfrac{1}{2}AB \cdot C_1E$, откуда $BD = \dfrac{AB \cdot C_1E}{AC_1}$. Так как длины всех ребер призмы равны 1 (по условию), то $AB = 1$. Из ΔAC_1E, где $AE = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}$, $AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2}$, или $AC_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; C_1E найдем из прямоугольного ΔAEC_1:

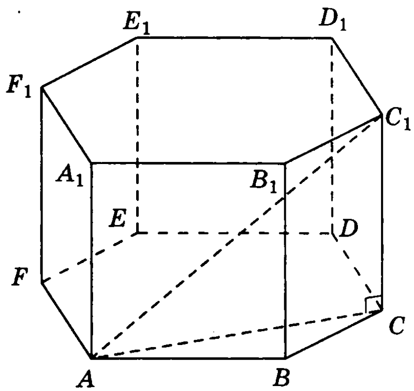
$$C_1E = \sqrt{AC_1^2 - AE^2} = \sqrt{2 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Тогда $BD = \dfrac{1 \cdot \sqrt{7}/2}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

К таблице 20

29. Соединим точку A с точками C и C_1. Заметим, что в правильном шестиугольнике $AC \perp AF$, так как $\angle FAB = 180° \cdot (6 - 2) : 6 = 120°$, а $\angle BAC = 30°$. Кроме того, AC — проекция AC_1 на плоскость основания призмы. По теореме о 3-х перпендикулярах имеем $BC_1 \perp C_1D_1$. Следова-



тельно, AC_1 — искомое расстояние от точки A до прямой C_1D_1. В прямоугольном ΔACC_1 $CC_1 = 1$, $AC = \sqrt{3}$ (см. № 8 к табл. 3), тогда $AC_1 = \sqrt{1+3} = 2$.

Ответ: 2.

К таблице 21

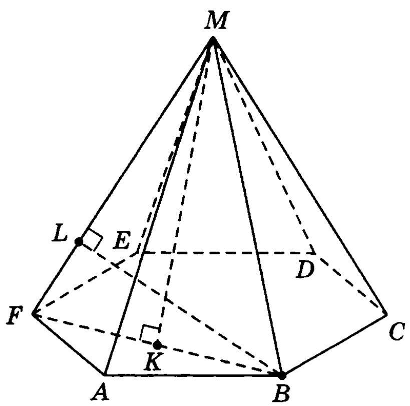
4. Расстояние от точки B до прямой MF есть длина перпендикуляра BL. Соединим точки B и F, проведем высоту MK в равнобедренном ΔMFB. Применяя метод сравнения площадей к ΔMFB, имеем:

$$\frac{1}{2}MF \cdot BL = \frac{1}{2}BF \cdot MK,$$

откуда $BL = \dfrac{BF \cdot MK}{MF}$, где $BF = \sqrt{3}$ (см. № 8 к табл. 3), $MF = 2$ (по условию), MK найдем из прямоугольного ΔFKM:

$$MK = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}, \text{ тогда}$$

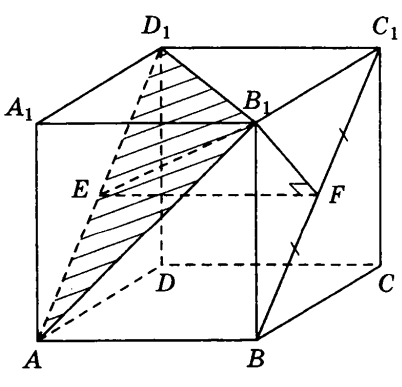
$$BL = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{13}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{39}}{4}.$$



Ответ: $\dfrac{\sqrt{39}}{4}$.

§ 5. Расстояние от точки до плоскости

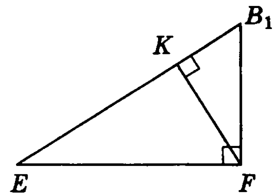
К таблице 22



13. Так как $A...D_1$ единичный куб и F — середина BC_1, то E — середина AD_1 ($BC_1 =$ $= AD_1$ как диагонали граней куба).

Из точки F проведем перпендикуляр FK к плоскости AB_1D_1 (см. рис. на плане), $FE \perp AD_1$, значит, $KE \perp AD_1$, следовательно, точка K лежит на отрезке $B_1E \perp AD_1$ ($B_1D_1 = B_1A$ как диагонали граней куба, E — середина AD_1, значит, B_1E — медиана и высота равнобедренного ΔAB_1D_1).

Отрезок FK — расстояние от точки F до плоскости AB_1D_1.



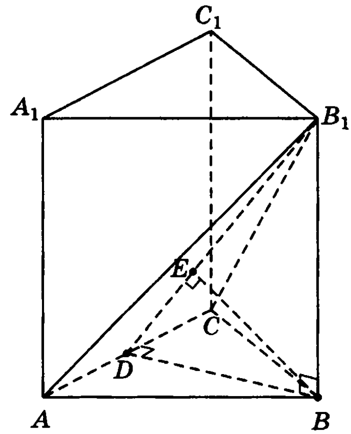
Имеем $\frac{1}{2}FK \cdot B_1E = \frac{1}{2}EF \cdot FB_1$, откуда

$$FK = \frac{EF \cdot FB_1}{B_1E} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}/2}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

К таблице 23

3. Плоскость AB_1C представляет собой равнобедренный треугольник, где $AB_1 = B_1C$ как диагонали равных квадратов (все ребра правильной призмы равны 1 по условию задачи), тогда B_1D — высота и медиана ΔAB_1C. Соединим точки B и D. Искомым расстоянием от точки B до плоскости AB_1C будет расстояние BE от точки B до прямой B_1D. Применяя метод сравнения площадей к ΔB_1BD, имеем:



$$\frac{1}{2}B_1D \cdot BE = \frac{1}{2}BB_1 \cdot BD,$$

откуда $BE = \frac{BB_1 \cdot BD}{B_1D}$, где $BB_1 = 1$, $BD = \frac{\sqrt{3}}{2}$

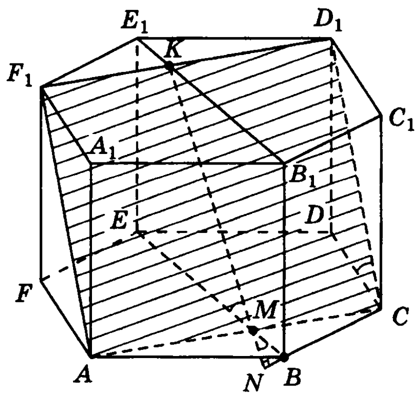
(находим из ΔBDC), $B_1D = \sqrt{BB_1^2 + BD^2} = \sqrt{1 + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Тогда $BE = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

К таблице 24

15. Пусть M — точка пересечения прямых AC и BE. Заметим, что угол между прямой BE и плоскостью ACD_1 равен углу между прямыми CD и CD_1. Так как $\angle DCD_1 = 45°$, то $\angle KME = \angle D_1CD = \angle BMN = 45°$, где BN перпендикуляр, опущенный из точки B на плоскость ACD, т. е. $BN = BM \sin 45°$.

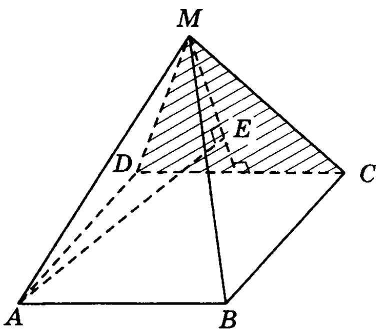


В ΔMBC $\angle MCB = 30°$, $BC = 1$, тогда $MB = \frac{1}{2}$.

Значит, $BN = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

К таблице 25

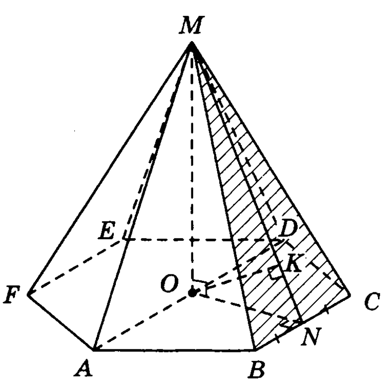


1. Поскольку все ребра правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$ равны 1, то ΔMDC — равносторонний, где точки E — центр треугольника, $ME = R$ — радиус описанной окружности.

Так как $a = R\sqrt{3}$, где $a = DC = 1$, $R = ME$, то $ME = 1/\sqrt{3}$. Тогда искомым расстоянием от точки A до плоскости MCD будет длина перпендикуляра AE. Из ΔAME, где $AM = 1$, $ME = 1/\sqrt{3}$, найдем AE: $AE = \sqrt{AM^2 - ME^2}$, или $AE = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

К таблице 26



3. Поскольку прямая $AD \parallel BC$, то $AD \parallel$ плоскости MBC, значит, расстояние от точки A до плоскости MBC равно расстоянию от точки O до плоскости MBC. Проведем апофему MN. Так как боковые грани пирамиды равные равнобедренные треугольники, то N — середина BC и $ON \perp BC$ (ON — радиус вписанной в основание окружности, N — точка касания). Искомым расстоянием от точки A до плоскости MBC будет длина перпендикуляра OK. Расстояние OK найдем методом сравнения площадей прямоугольного ΔMON ($MO \perp ON$), где $ON = \sqrt{3}/2$.

Длину MO найдем из ΔAOM: $AO = AB = 1$, $AM = 2$, тогда $MO = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$.

Из ΔMON $MN = \sqrt{MO^2 + ON^2}$, $MN = \sqrt{3 + 3/4} = \sqrt{15/4} = \sqrt{15}/2$.

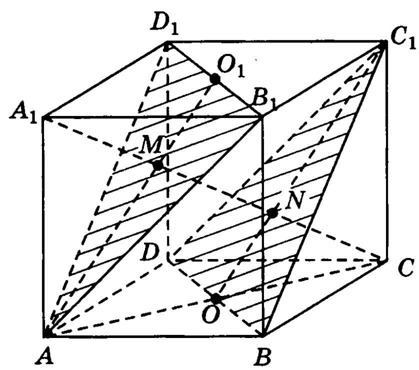
$S_{\Delta MON} = \frac{1}{2} MO \cdot ON = \frac{1}{2} MN \cdot OK$, откуда $OK = \frac{MO \cdot ON}{MN} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}/2}{\sqrt{15}/2} =$

$= \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{3\sqrt{15}}{15} = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

§ 6. Расстояние между двумя прямыми

К таблице 27



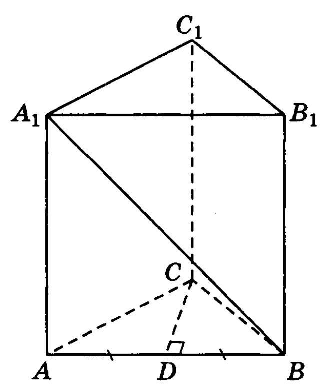
15. Поскольку $BD \parallel B_1D_1$, $AB_1 \parallel DC_1$ и $AD_1 \parallel BC_1$, то плоскость $AB_1D_1 \parallel$ плоскости BDC_1. Значит, расстояние между данными скрещивающимися прямыми равно расстоянию MN между этими плоскостями, где M и N — точки пересечения диагонали A_1C соответственно с плоскостью AB_1D_1 и плоскостью BDC_1. Итак, длина MN есть расстояние между данными прямыми AB_1 и BC_1. В ΔAMC $AM \parallel ON$. Так как O — середина AC и $ON \parallel AM$, то, по теореме Фалеса N — середина MC, значит, ON — средняя линия ΔAMC. Аналогично, MO_1 — средняя линия ΔA_1NC_1, т. е. $A_1M = MN$.

Следовательно, $MN = \frac{1}{3} A_1C$.

Так как $AC = \sqrt{2}$, $AA_1 = 1$, то из ΔA_1AC $A_1C = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$, тогда $MN = \sqrt{3}/3$.

Ответ: $\sqrt{3}/3$.

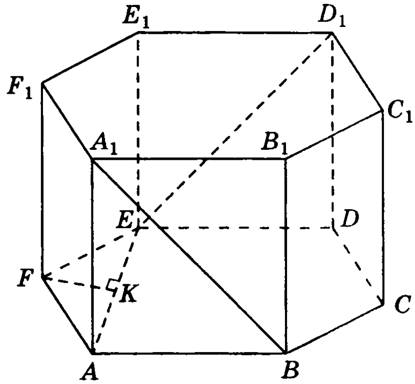
К таблице 28



9. Поскольку прямая A_1B пересекается с прямой AA_1 и лежит в плоскости ABB_1, параллельной CC_1, то искомое расстояние между прямыми CC_1 и A_1B равно расстоянию от прямой CC_1 до плоскости ABB_1. В основании призмы проведем высоту CD. Заметим, что $CD \perp BB_1$, так как $BB_1 \perp$ плоскости ABC. Значит, CD — искомое расстояние. В равностороннем ΔABC $AC = 1$, $AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}$, тогда из ΔACD $CD = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

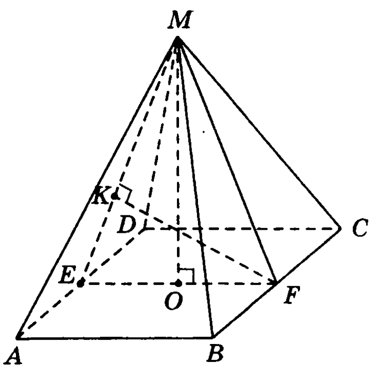
К таблице 29



11. Искомым расстоянием между прямыми A_1B и D_1E будет расстояние между параллельными плоскостями ABB_1 и DEE_1, т. е. AE (или BD). В ΔAFE $AF = FE = 1$, $\angle AFE = 120°$, тогда $\angle EFK = 60°$. Из ΔFEK $EK = FE \sin 60° = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Значит, $AE = 2 \cdot EK = \sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

К таблице 30



Так как $BC \parallel AD$, то $BC \parallel$ плоскости AMD. Значит, расстояние между скрещивающимися прямыми AM и BC равно расстоянию от прямой BC до плоскости AMD.

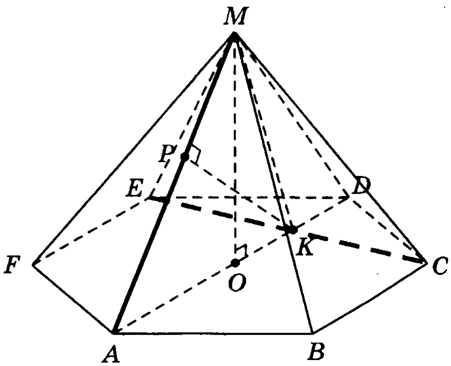
Соединим точки E и F соответственно середины ребер AD и BC. Тогда высота FK ΔMEF будет искомым расстоянием. В ΔMEF $EF = AB = 1$; ME найдем из ΔAME, где $AE = \frac{1}{2}$, $AM = 1$, $ME = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Высоту MO пирамиды найдем из ΔMOE: $MO = \sqrt{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, где $OE = \frac{1}{2}EF$.

Из сравнения площадей ΔMEF имеем: $\frac{1}{2} \cdot ME \cdot FK = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot MO$, откуда $FK = \frac{EF \cdot MO}{ME} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}/2}{\sqrt{3}/2} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

К таблице 31



Проведем высоту MO пирамиды и диагональ AD основания. Пусть K — точка пересечения прямой CE и AD. Тогда расстоянием между скрещивающимися прямыми MA и CE будет длина перпендикуляра, опущенного из точки K на боковое ребро AM. Так как $AB = OD = 1$ и K — середина OD, то $OK = \frac{1}{2}$, $AK = AO + OK = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Из ΔAOM $MO = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$;

из MOK $MK = \sqrt{MO^2 + OK^2} = \sqrt{3 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$. Пусть $MP = x$, $AP = y$, тогда $x + y = 2$. Из ΔMPK и ΔAPK имеем: $PK^2 = MK^2 - x^2$ и $PK^2 = AK^2 - y^2$.

Сравнивая правые части, получим:

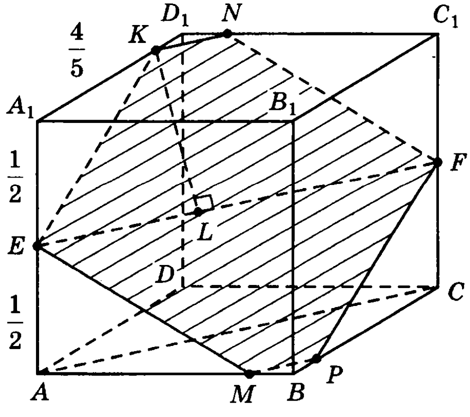
$\frac{13}{4} - x^2 = \frac{9}{4} - y^2$, или $x^2 - y^2 = 1$.

Решая систему уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ x + y = 2 \end{cases}$ находим $x = \frac{5}{4}$, тогда искомое расстояние $PK = \sqrt{MK^2 - x^2} = \sqrt{\frac{13}{4} - \frac{25}{16}} = \frac{\sqrt{27}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

§ 7. Площади сечений многогранников

К таблице 32



14. Сечение представляет собой шестиугольник $EMPFNK$, стороны которого соответственно параллельны (построение и доказательство выполнить самостоятельно).

По условию ребро куба равно 1 и $AM = 0{,}8 = \frac{4}{5}$, тогда $MB = \frac{1}{5}$. Пусть S — площадь сечения. Соединим точки E и F. Так как E и F — соответственно середины AA_1 и CC_1, то $EF \parallel AC$ и $EF = AC$.

Из ΔABC $AC = \sqrt{2}$, значит, $EF = \sqrt{2}$. Так как $A_1K = AM = \frac{4}{5}$, то $KD_1 =$ $= D_1N = \frac{1}{5}$. Из ΔKD_1N $KN = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{5}\sqrt{2}$, $KE = NF = EM = PF$, т. е. трапеция $EKNF$ — равнобедренная, тогда

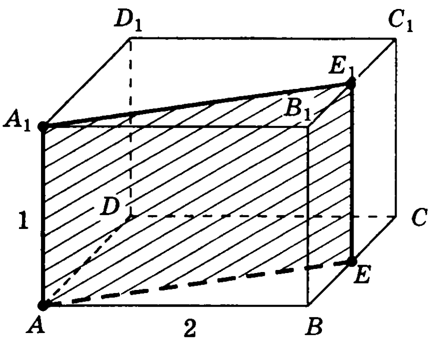
$S = 2 \cdot S_{EKNF} = 2 \cdot \frac{KN + EF}{2} \cdot KL = (KN + EF) \cdot KL$, где KL — высота трапеции. Из ΔKA_1E $KE = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{89}}{10}$. Из ΔKEL $KL = \sqrt{KE^2 - EL^2}$.

Но $EL = \frac{1}{2}(EF - KN) = \frac{2\sqrt{2}}{5}$, тогда $KL = \sqrt{\frac{89}{100} - \frac{8}{25}} = \frac{\sqrt{57}}{10}$.

Значит, $S = \left(\frac{\sqrt{2}}{5} + \sqrt{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{57}}{10} = \frac{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{57}}{5 \cdot 10} = \frac{3\sqrt{114}}{25}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{114}}{25}$.

К таблице 33



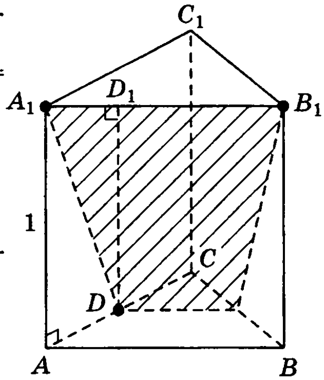
4. Так как $AA_1 \perp (ABCD)$, то $AA_1 \perp AE$, значит, четырехугольник AA_1E_1E — прямоугольник, где $AA_1 = 1$. Длину AE найдем из прямоугольного ΔABE, где $AB = 2$, $BE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}$, тогда $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2}$, или $AE = \sqrt{4 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

Значит, $S_{AA_1E_1E} = AA_1 \cdot AE = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

К таблице 34

5. Сечение, проходящее через данные точки A_1, B_1 и D, представляет собой равнобедренную трапецию (доказать самостоятельно), где $A_1B_1 = 1$, $DE = \frac{1}{2}$ (средняя линия ΔABC).



Боковую сторону A_1D найдем из прямоугольного ΔA_1AD, где $AA_1 = 1$, $AD = \frac{1}{2}$, тогда $A_1D =$

$$= \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Из вершины D опустим на основание A_1B_1 высоту трапеции DD_1, тогда

$$A_1D_1 = \frac{1}{2}(A_1B_1 - DE) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

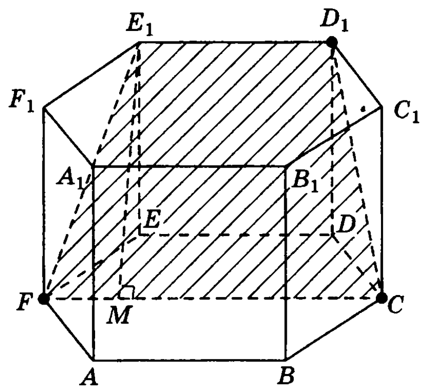
Из ΔA_1D_1D $DD_1 = \sqrt{A_1D^2 - A_1D_1^2} = \sqrt{\frac{5}{4}-\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{19}}{4}.$

Следовательно, $S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2}(DE + A_1B_1)\cdot DD_1$, или

$$S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot\frac{\sqrt{19}}{4} = \frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{19}}{4} = \frac{3\sqrt{19}}{16}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{19}}{16}$.

К таблице 35



6. Сечение, проходящее через точки F, C и D_1, представляет собой равнобедренную трапецию (доказать самостоятельно).

$S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2}(FC + E_1D_1)\cdot E_1M$, где $FC = 2AB = 2$; $E_1D_1 = 1$.

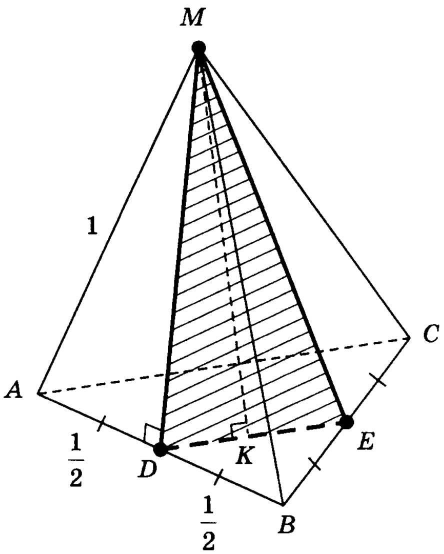
Высоту трапеции E_1M найдем из ΔE_1FM; $FM = \frac{1}{2}(FC - E_1D_1) = \frac{1}{2}$.

Из ΔFEE_1, где $FE = 1$, $EE_1 = 1$, $FE_1 = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, тогда $E_1M = \sqrt{E_1F^2 - MF^2} = \sqrt{2-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$, следовательно,

$$S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2}(2+1)\cdot\frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{3\sqrt{7}}{4}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{7}}{4}$.

К таблице 36



4. Так как по условию тетраэдр единичный, а точки D и E соответственно середины ребер AB и BC, то сечение MDE — равнобедренный треугольник, тогда $S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2}DE \cdot MK$, где $DE = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}$ — средняя линия ΔABC, MK — высота сечения.

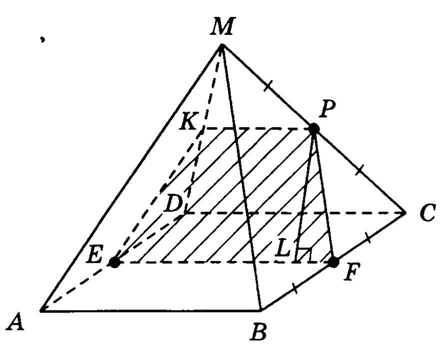
Из ΔMDK $MK = \sqrt{MD^2 - DK^2}$,

$DK = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{4}$, $MD = \sqrt{AM^2 - AD^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $MK = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{11}}{4}$.

Тогда $S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{11}}{4} = \frac{\sqrt{11}}{16}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{11}}{16}$.

К таблице 37



4. По условию все ребра правильной пирамиды равны 1. Так как E, F и P — середины соответственно ребер AD, BC и MC, то $EF = AB = 1$, $KP = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}$ — средняя линия ΔMDC, аналогично $KE = PF = \frac{1}{2}MA = \frac{1}{2}$.

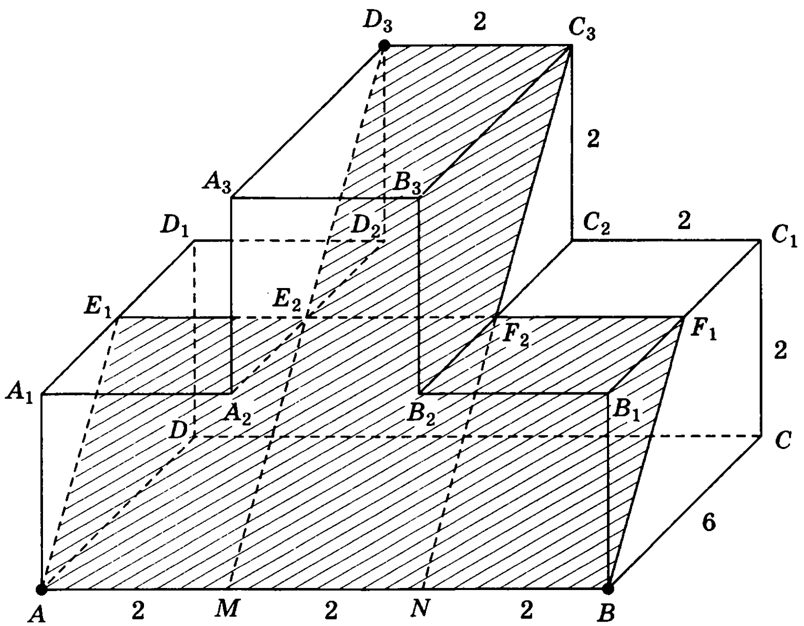
Следовательно, сечение, проходящее через данные точки, — равнобедренная трапеция. Проведем высоту трапеции PL, тогда $LF = \frac{1}{2}(EF - KP) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$; из ΔPLF $PL = \sqrt{PF^2 - LF^2} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Значит, $S_{\text{сеч.}} = = \frac{1}{2}(EF + KP) \cdot PL = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{16}$.

К таблице 38

10. Сечение многогранника, проходящее через точки A, B и D_3, представляет многоугольник $AE_1E_2D_3C_3F_2F_1B$. Соединив точки E_2 и F_2, E_2 и M, F_2 и N, видим, что многоугольник состоит из четырех равных прямоугольников.



Значит, $S = 4\cdot S_{AE_1E_2M}$, $S_{AE_1E_2M} = AM \cdot AE_1$, где $AM = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}\cdot 6 = 2$.

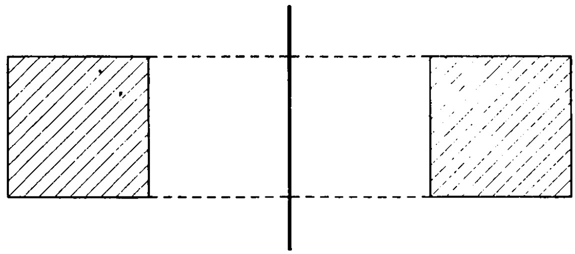
Из ΔAA_1E_1, где $AA_1 \perp A_1E_1$, $AA_1 = 2$, $A_1E_1 = \frac{1}{2}A_1D_1 = \frac{1}{2}AD = 3$, найдем $AE_1 = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$, значит, $S_{AE_1E_2M} = 2\sqrt{13}$, $S = 4\cdot 2\sqrt{13} = 8\sqrt{13}$.

Ответ: $8\sqrt{13}$.

§ 8. Площади поверхностей вращения плоских фигур

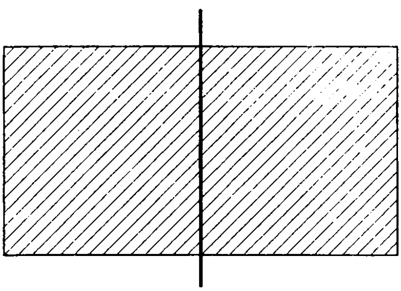
К таблице 39

4. Рассмотрим осевое сечение тела вращения. Так как квадрат единичный, то $a = H = 1$, то $S = 2\pi R(R + H) = 2\pi \cdot 2 \cdot (2 + 1) = 12\pi$.



Ответ: 12π.

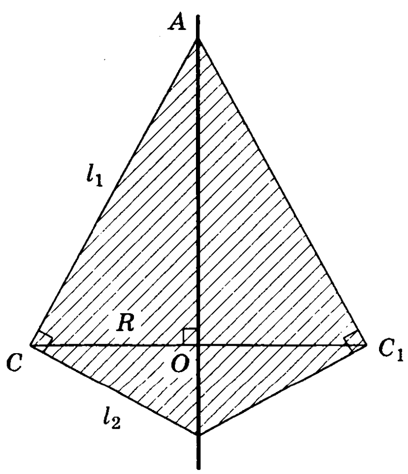
К таблице 40



2. При вращении прямоугольника $ABCD$ вокруг прямой, проходящей через середины AB и CD, образуется цилиндр, у которого $R = 1$ и высота $H = 1$, тогда $S_{\text{полн.}} = 2\pi R(R + H) = 2\pi \cdot 1 \cdot (1 + 1) = 4\pi$.

Ответ: 4π.

К таблице 41



4. Рассмотрим осевое сечение тела вращения, полученного вращением прямоугольного ΔABC вокруг прямой, содержащей гипотенузу AB. При вращении образуются два конуса с общим основанием.

Тогда $S = S_{ACC_1} + S_{BCC_1} = \pi Rl_1 + \pi Rl_2 = \pi R(l_1 + l_2)$, где $l_1 = 2$, $l_2 = 1$.

Из ΔABC $AB = \sqrt{l_1^2 + l_2^2} = \sqrt{5}$.

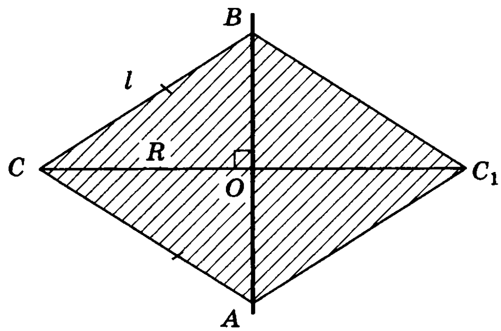
$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot OC = \frac{1}{2}l_1 \cdot l_2$, откуда $OC = R = \frac{l_1 \cdot l_2}{AB}$, или $R = \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

тогда $S = \pi \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot (2 + 1) = \frac{6\pi}{\sqrt{5}}$.

Ответ: $\frac{6\pi}{\sqrt{5}}$.

К таблице 42

6. При вращении равностороннего треугольника вокруг прямой AB образуются два равных конуса CBC_1 и CAC_1 с общим основанием.



Тогда $S = 2S_{CBC_1} = 2 \cdot \pi Rl$, где

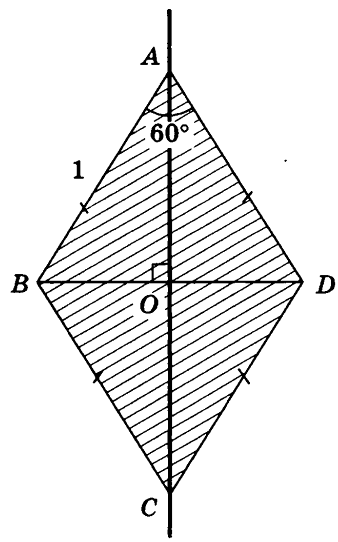
$l = 1$, $BO = \frac{1}{2}$, $R = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Значит, $S = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \sqrt{3}\pi$.

Ответ: $\sqrt{3}\pi$.

К таблице 43

3. При вращении ромба $ABCD$ со сторонами, равными 1, образуются два равных конуса с общим основанием.



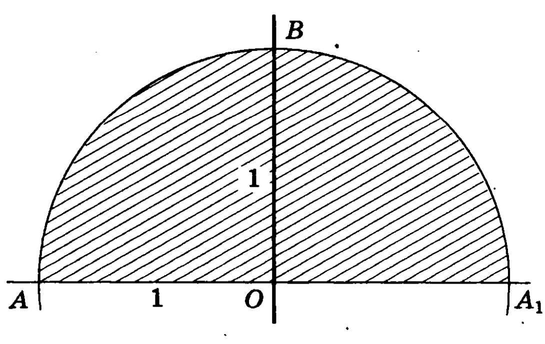
Тогда $S = 2S_{BAD} = 2\pi Rl$, где $l = AB = 1$, $R = BO = \frac{1}{2}$ ($\triangle ABD$ — равносторонний, так как $\angle A = 60°$ и $\angle ABD = \angle ADC = 60°$).

Значит, $S = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \pi$.

Ответ: π.

К таблице 44

3. При вращении четверти круга радиуса 1 вокруг прямой OB образуется полушар. Площадь поверхности полушара будет равна $S = \frac{1}{2} \cdot 4\pi R^2 + \pi R^2 = 3\pi R^2$. Так как $R = 1$, то $S = 3\pi$.



Ответ: 3π.

К таблице 45

1 (см. рис. к табл. 52, № 2).

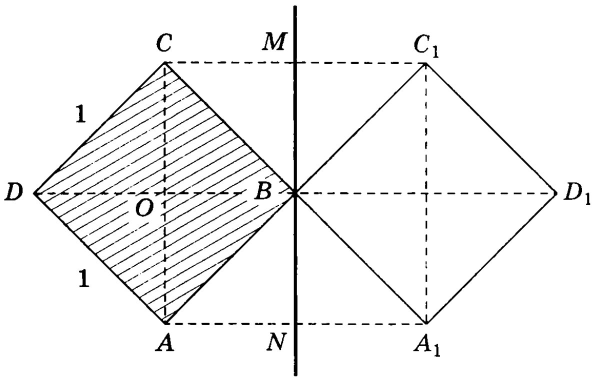
При вращении правильного шестиугольника со стороной, равной 1, вокруг оси, проходящей через его вершину C перпендикулярно радиусу, проведенному в эту вершину, получим два равных усеченных конуса с общим основанием и два «пустых» конуса.

Следовательно, $S = 2(\pi l(R + r) - \pi r_1 l) = 2\pi l(R + r - r_1)$, где $l = EF = 1$; $R = EC = 2$; $r = EM = \frac{3}{2}$; $r_1 = DM = \frac{1}{2}$, тогда

$$S = 2\pi \cdot 1 \cdot \left(2+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right) = 2\pi \cdot 3 = 6\pi.$$

Ответ: 6π.

К таблице 46

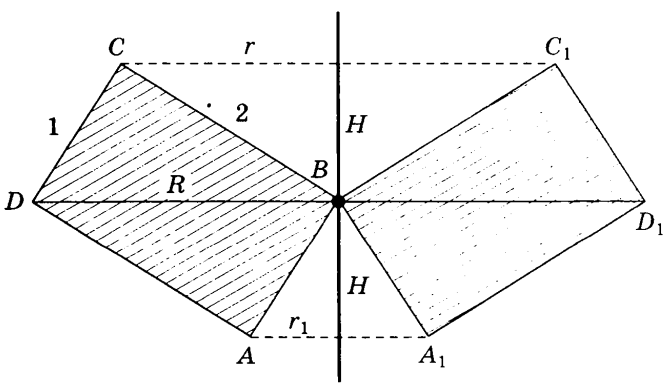


1. Заметим, что $\Delta DOC = \Delta CMB$ и $\Delta AOD = \Delta ABN$. Равные треугольники имеют равные площади, следовательно, квадрат $ABCD$ можно заменить прямоугольником $ACMN$. Тогда при вращении прямоугольника $ACMN$ получим цилиндр с осевым сечением ACC_1A_1. Значит, $V_{\text{т.в.}} = \pi R^2 H$, где $R = OB = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $H = 2R = \frac{2}{\sqrt{2}}$.

$$V_{\text{т.в.}} = \pi \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

К таблице 47



4. При вращении прямоугольника $ABCD$ вокруг прямой, перпендикулярной диагонали BD, проведенной через точку B, получим два усеченных конуса с общим основанием и два «пустых» конуса с основаниями CC_1 и AA_1. Введем обозначения, показанные на рисунке.

Высоту H найдем из соотношения: $\frac{1}{2}CD \cdot CB = \frac{1}{2}BD \cdot H$, или $1 \cdot 2 = R \cdot H$.

Но $R = \sqrt{CD^2 + BC^2} = \sqrt{5}$, тогда $H = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $r = \sqrt{2^2 - H^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$;

$r_1 = \sqrt{1 - H^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Следовательно, искомый объем будет равен:

$$V_{\text{т.в.}} = V_{CDB} - V_{CBC_1} + V_{ADB} - V_{ABA_1} = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 + Rr) - \frac{1}{3}\pi r^2 H + \frac{\pi H}{3}(R^2 + r_1^2 + Rr_1) - \frac{1}{3}\pi r_1^2 H = \frac{\pi H}{3}(2R^2 + r^2 + r_1^2 + R \cdot r + R \cdot r_1 - r^2 - r_1^2) = \frac{\pi HR}{3} \cdot (2R + r + r_1).$$

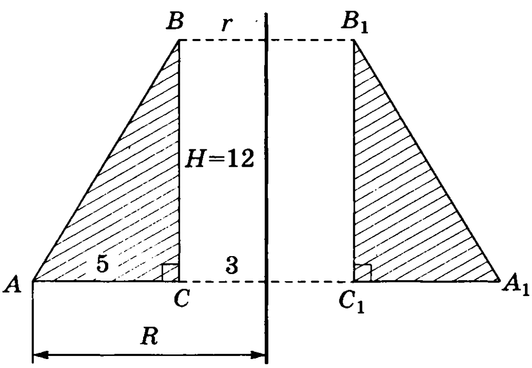
Подставляя числовые значения, находим:

$$V_{\text{т.в.}} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} \cdot \left(2\sqrt{5} + \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2\pi}{3} \cdot (2\sqrt{5} + \sqrt{5}) = \frac{2\pi}{3} \cdot 3\sqrt{5} = 2\pi\sqrt{5}.$$

Ответ: $2\pi\sqrt{5}$.

К таблице 48

6. При вращении прямоугольного ΔABC вокруг внешней оси, параллельной большему катету и отстоящему от него на 3, получим усеченный конус и «пустой» цилиндр.



Тогда $V_{\text{т.в.}} = V_{\text{ус.к.}} - V_{\text{цил.}}$, или

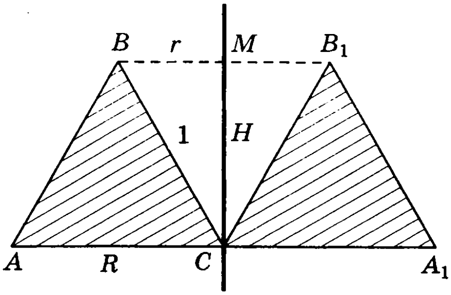
$$V_{\text{т.в.}} = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 + Rr) - \pi r^2 H = \frac{\pi H}{3}(R^2 - 2r^2 + Rr),$$ где $H = 12$,

$R = 5 + 3 = 8$, $r = 3$. Следовательно, $V_{\text{т.в.}} = 4\pi \cdot (64 - 18 + 24) = 280\pi$.

Ответ: 280π.

К таблице 49

7. Рассмотрим осевое сечение тела вращения. Оно состоит из усеченного конуса ABB_1A_1 и конуса CBB_1.

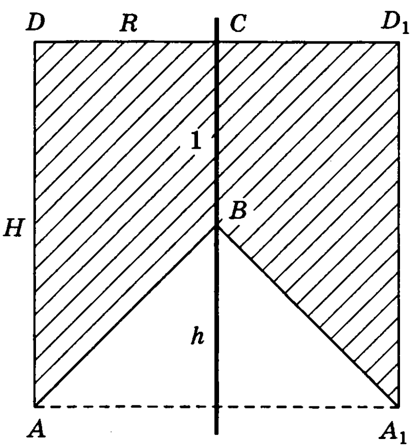


Пусть $BM = r$, $AC = R$, $MC = H$, тогда $V_{\text{т.в.}} = V_{\text{ус.к.}} - V_{\text{к.}} = \dfrac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 + Rr) - \dfrac{1}{3}\pi r^2 H = \dfrac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 + Rr - r^2) = \dfrac{\pi HR}{3}(R + r)$, или

$$V_{\text{т.в.}} = \frac{\pi \cdot \sqrt{3}/2 \cdot 1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{2\cdot 3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{4}$.

К таблице 50



6. $DC = R = 1$, $AD = H = 2$, $h = 1$, R и H соответственно радиус и высота цилиндра, h — высота конуса.

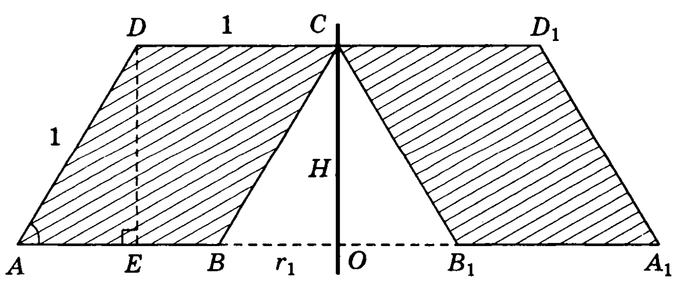
Следовательно, $V_{\text{т.в.}} = V_{\text{цил.}} - V_{\text{кон.}} = \pi R^2 H - \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}\pi R^2(3H - h)$, или

$$V_{\text{т.в.}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 1 \cdot 5 = \frac{5\pi}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{5\pi}{3}$.

К таблице 51

4. При вращении ромба со сторонами, равными 1, и острым углом в 60° вокруг оси, проведенному через вершину C, перпендикулярно сто-



роне DC, образуются усеченный конус ADD_1A_1 и конус BCB_1. Пусть в усеченном конусе $R = AO = 1 + r_1$, $r = DC = 1$, $CO = DE = H$, а в конусе BCB_1 $BO = r_1$, тогда объем тела вращения будет равен:

$$V_{\text{т.в.}} = V_{\text{ус.к.}} - V_{\text{к.}} = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 + Rr) - \frac{1}{3}\pi r_1^2 H = \frac{\pi H}{3}((1 + r_1)^2 + 1 +$$

$$+ (1 + r_1)\cdot 1 - r_1^2) = \pi H(1 + r_1).$$

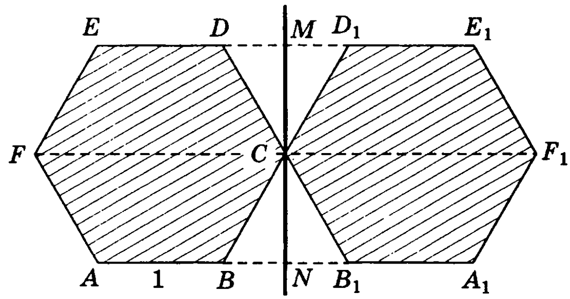
Заметим, что в ΔADE $\angle ADE = 30°$, тогда $AE = BO = \frac{1}{2}$, $DE = CO = H =$

$= \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Значит, $V_{\text{т.в.}} = \pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}\pi}{4}$.

К таблице 52

2. Рассмотрим осевое сечение тела вращения. Проведем прямую FF_1. При вращении правильного шестиугольника со стороной, равной 1, вокруг оси, проходящей через его вершину C перпендикулярно радиусу, проведенному в эту вершину, получим два равных усеченных конуса с общим основанием и два «пустых» конуса. Следовательно, объем тела вращения будет равен: $V_{\text{т.в.}} = 2(V_{\text{ус.к.}} - V_{\text{к.}})$.



Пусть $FC = R$, $EM = r$, $DM = r_1$, $MN = H$, $MC = \frac{1}{2}H$, тогда $V_{\text{т.в.}} =$

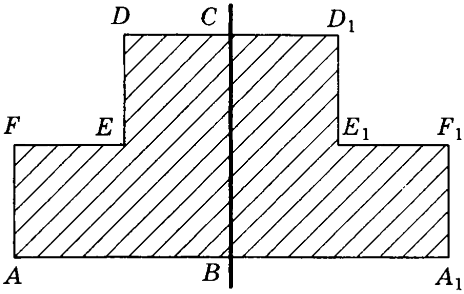
$$= 2\left(\frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2) - \frac{1}{3}\pi\cdot r_1^2\cdot\frac{1}{2}H\right) = \frac{2\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2 - \frac{1}{2}r_1^2).$$

Но $R = FC = 2$, $r = 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, $r_1 = \frac{1}{2}$, $H = MN = BD = \sqrt{3}$, значит,

$$V_{\text{т.в.}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\left(4+3+\frac{9}{4}-\frac{1}{8}\right) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\cdot\frac{73}{8} = \frac{73\sqrt{3}\pi}{12}.$$

Ответ: $\frac{73\sqrt{3}\pi}{12}$.

К таблице 53



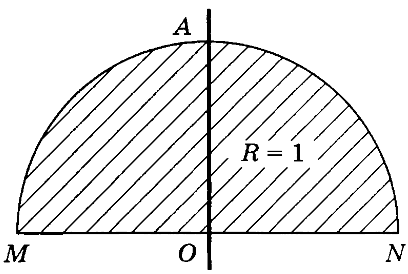
2. При вращении многоугольника $ABCDEF$, составленного из трех единичных квадратов, образуются два цилиндра с радиусами оснований соответственно 2 и 1 и высотой 1.

Пусть $AB = R = 2$; $DC = r = 1$, $H = 1$, тогда $V_{\text{т.в.}} = V_1 + V_2 = \pi R^2 H + \pi r^2 H = \pi H(R^2 + r^2)$, или

$V_{\text{т.в.}} = \pi \cdot 1 \cdot (2^2 + 1^2) = 5\pi$.

Ответ: 5π.

К таблице 54



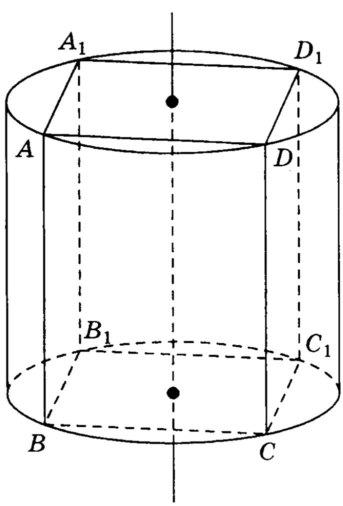
2. При вращении полукруга радиуса 1 вокруг прямой $OA \perp MN$ образуется полушар, ограниченный снизу кругом.

Тогда $V_{\text{т.в.}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 + \pi R^2 = \frac{2}{3}\pi R^3 + \pi R^2 = \frac{2}{3}\pi + \pi = \frac{5\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{5\pi}{3}$.

§ 9. Объемы тел вращения многогранников

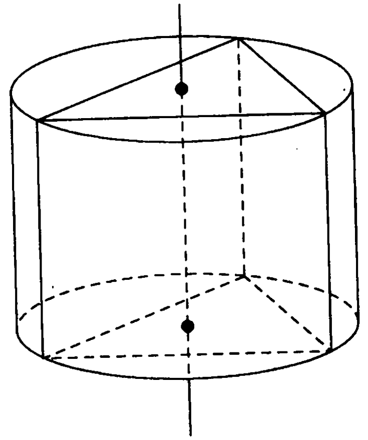
К таблице 55



2. Повернем куб так, как показано на рисунке. При вращении единичного куба вокруг прямой, проходящей через центры граней ADD_1A_1 и BCC_1B_1, получим цилиндр радиуса $R = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и высотой $H = 1$, тогда $V_{\text{т.в.}} = V_{\text{цил.}} = \pi R^2 H = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

К таблице 56

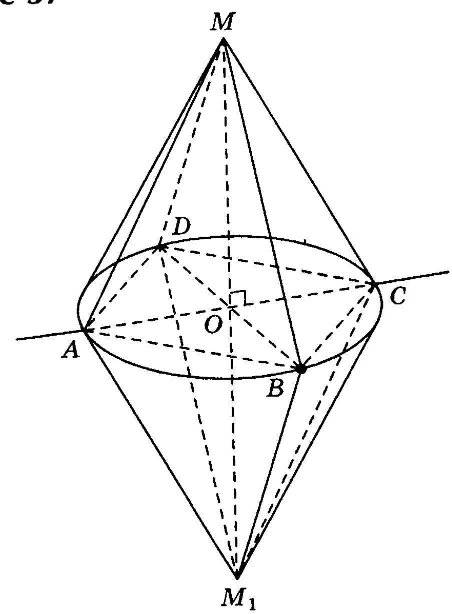


2. При вращении правильной призмы, все ребра которой равны 1, вокруг прямой, проходящей через центры оснований, получим цилиндр, у которого высота $H = 1$, радиус основания $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

тогда $V_{\text{т.в.}} = V_{\text{цил.}} = \pi R^2 H = \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

К таблице 57



2. При вращении правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$, все ребра которой равны 1, вокруг прямой AC, образуются два равных конуса радиуса $OC = R$ и высоты $MO = H$.

Тогда $V_{\text{т.в.}} = 2V_{\text{кон.}} = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 H =$

$= \frac{2}{3}\pi R^2 H$, где $R = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Высоту H найдем из прямоугольного ΔAOM, где $AM = 1$, тогда

$$H = \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно,

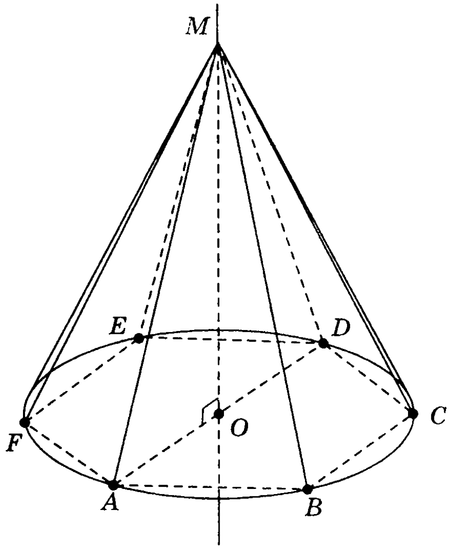
$$V_{\text{т.в.}} = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{6}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$.

К таблице 58

1. При вращении правильного шестиугольника $MABCDEF$ вокруг прямой, содержащей высоту MO, получим конус, у которого радиус основания $AO = R$, а высота $MO = H$. Тогда $V_{\text{т.в.}} = V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

По условию $AB = 1$ — сторона основания, $AM = 2$ — длина бокового ребра. Известно, что в правильном шестиугольнике $AB = a = R = AO = 1$;



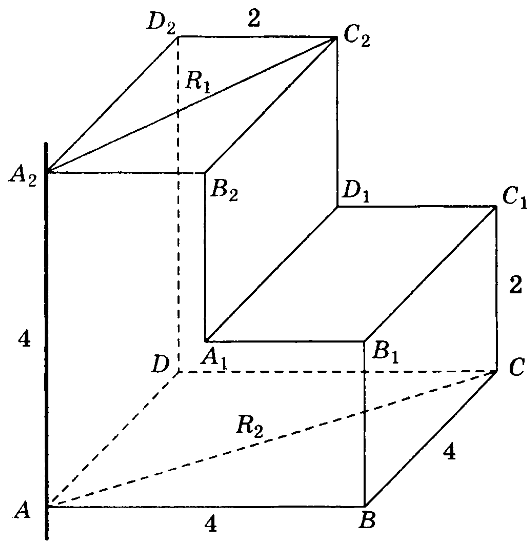
из ΔAOM найдем $MO = H = \sqrt{AM^2 - AO^2}$, или $H = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$, тогда

$$V_{\text{т.в.}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$.

К таблице 59

2. Тело, полученное вращением многогранника вокруг прямой AA_2, состоит из двух цилиндров, у которых радиусы оснований равны R_1 и R_2, а высоты равны $A_1B_2 = CC_1 = H = 2$.



Тогда $V_{\text{т.в.}} = V_1 + V_2 = \pi R_1^2 H + \pi R_2^2 H = \pi H(R_1^2 + R_2^2)$. Из $\Delta A_2B_2C_2$, где $A_2B_2 = 2$, $B_2C_2 = BC = 4$, имеем $R_1 = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Аналогично из ΔABC $R_2 = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$. Значит, $V_{\text{т.в.}} = \pi \cdot 2 \cdot (20 + 32) = 104\pi$.

Ответ: 104π.

§ 10. Многогранники

К таблице 60

13. Пусть a — ребро куба, b — сторона шестиугольника, тогда $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

По условию площадь шестиугольника равна $S = 1$. С другой стороны, $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}b^2$, значит, $\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot b^2 = 1$, или $\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a^2}{2} = 1$, $3\sqrt{3}a^2 = 4$, $a^2 = \frac{4}{3\sqrt{3}}$.

Следовательно, $S_{\text{полн.}} = 6a^2 = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

К таблице 61

15. Из точки A опустим перпендикуляр AE на продолжение C_1D_1 и соединим точки E и F, где $EF \parallel D_1D$ и $EF = D_1D = A_1A = 8$.

Поскольку $D_1D \perp (ADC)$, то $EF \perp (ACD)$, значит, AF — проекция AE на плоскость основания.

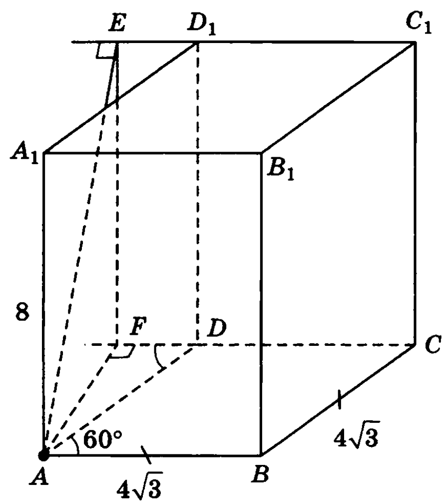
Так как $D_1C_1 \parallel DC$, то $AE \perp CD$, следовательно, $AF \perp CD$ (согласно теореме о трех перпендикулярах).

Из ΔADF, где $\angle ADF = \angle BAD = 60°$, $AF = 4\sqrt{3}\sin 60° = 4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}/2 = 6$;

из ΔAEF $AE = \sqrt{AF^2 + FE^2}$, или

$AE = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Ответ: 10.

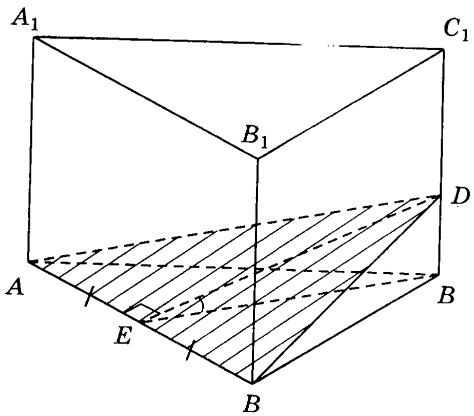


К таблице 62

5. Пусть ADB — секущая плоскость; проведем $CE \perp AB$, тогда $DE \perp AB$, $\angle DEC = 30°$. Пусть $AB = a$ — сторона основания.

В ΔCEB $BE = \frac{1}{2}a$, $BC = a$, тогда $CE = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $CD = \frac{\sqrt{3}}{2}a \operatorname{tg} 30° =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2}$.



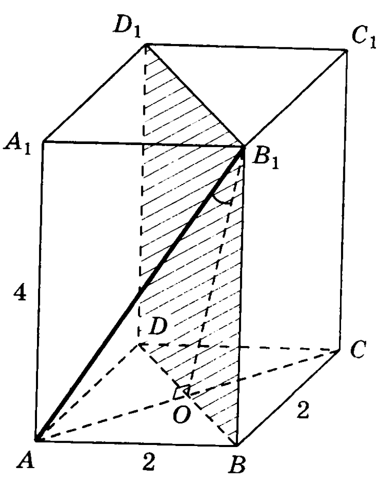
По условию объем пирамиды $DABC$ равен 1, или $\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a}{2}=1$, или $a^3=8\sqrt{3}$, $a=2\sqrt[3]{\sqrt{3}}$.

Но $S_{сеч.} = \frac{S_{ABC}}{\cos\alpha} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}:\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2}{2}$.

Так как $a=2\sqrt[3]{\sqrt{3}}$, то $a^2=4\sqrt[3]{3}$, тогда $S_{сеч.} = 2\sqrt[3]{3}$.

Ответ: $2\sqrt[3]{3}$.

К таблице 63



7. Проведем диагонали AC и BD основания. Пусть O — точка пересечения. Заметим, что AO — перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость BDD_1. Тогда $\angle AB_1O$ есть угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

В прямоугольном ΔAB_1O $AO = \frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$,

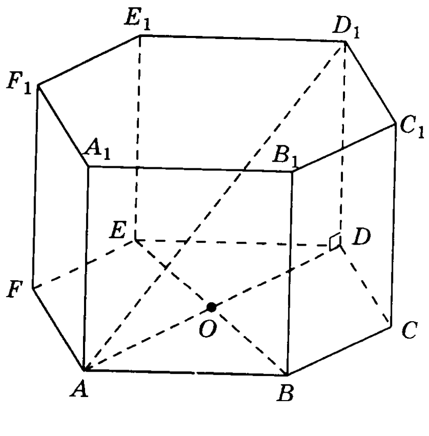
$AB_1 = \sqrt{AB^2+BB_1^2}$, или $AB_1 = \sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$,

тогда $\sin\angle AB_1O = \frac{AO}{AB_1}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$, откуда

$\angle AB_1O = \arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

К таблице 64



8. Пусть $AB = AA_1 = a$, тогда $AD = 2a$, так как в правильном шестиугольнике $a = R = AO$, $AD = 2R = 2a$.

Из ΔAD_1D, где $AD_1 = 1$, имеем: $AD^2 + D_1D^2 = 1$, или $4a^2 + a^2 = 1$, $a=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$S_{осн.} = 6\cdot S_{\Delta AOB} = 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$.

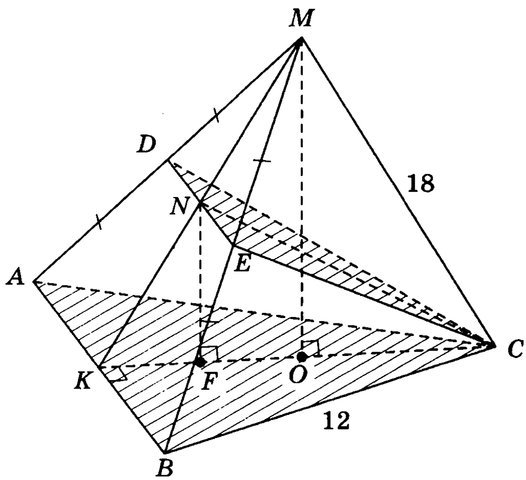
Следовательно, объем $V = S_{\text{осн.}} \cdot H$, или $V = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{2} \cdot a = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^3 =$

$= \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{(\sqrt{5})^3} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 5\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{15}}{50}$.

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{15}}{50}$.

К таблице 65

12. Из точки C проведем перпендикуляр CN к DE. Из точки N опустим перпендикуляр NF на плоскость основания. CK — медиана, биссектриса и высота ΔABC. $NF \perp DE$ и $CN \perp DE$, значит, $\angle NCF$ — линейный угол между плоскостями CDE и ABC.



В ΔABC $BC = OC \cdot \sqrt{3}$,

$OC = \dfrac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$.

Из ΔMOC $MO = \sqrt{18^2 - (4\sqrt{3})^2}$ $= \sqrt{324 - 48} = \sqrt{276} = 2\sqrt{69}$.

$NF = \dfrac{1}{2}MO = \sqrt{69}$ — средняя линия ΔKOM. Из ΔCKB, где $BC = 12$, $BK = 6$, $KC = \sqrt{144 - 36} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$.

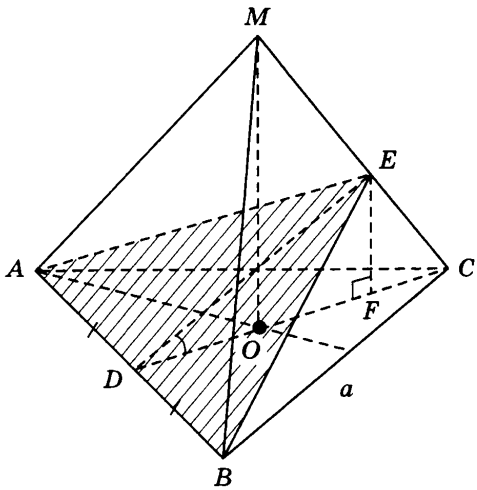
Так как $CO = 2 \cdot OK$ и $OF = FK$, то $FC = \dfrac{5}{6}KC = 5\sqrt{3}$.

Следовательно, $\operatorname{tg} \angle NCF = \dfrac{NF}{FC} = \dfrac{\sqrt{69}}{5\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{23}}{5}$, откуда

$\angle NCF = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{23}}{5}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{23}}{5}$.

К таблице 66



3. Пусть $AB = a$ — ребро правильного тетраэдра, тогда из ΔCDB, где $BC = a$, $BD = \frac{a}{2}$, $CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Проведем высоту MO тетраэдра. Проведем $EF \perp$ пл. ABC, $BC = OC\sqrt{3}$, откуда $OC = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Из ΔMOC $MO = \sqrt{MC^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Согласно условию задачи $V_{EABC} = \frac{2}{5}V_{MABC}$, тогда $EF = \frac{2}{5}MO = \frac{2}{5}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{2a\sqrt{6}}{15}$.

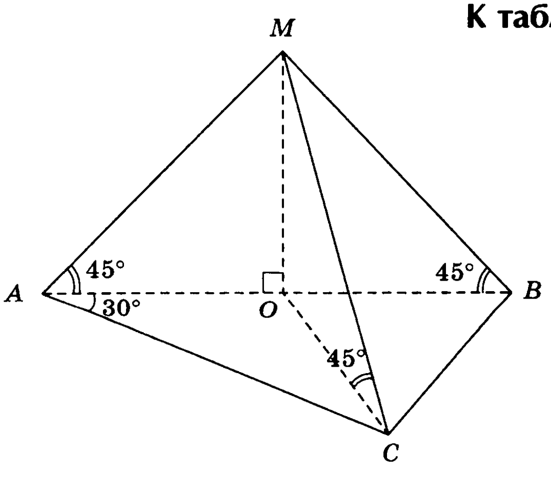
Так как $\Delta EFC \sim \Delta MOC$ (как прямоугольные, имеющие общий острый угол C), то $\frac{EF}{MO} = \frac{FC}{OC}$, или $\frac{FC}{OC} = \frac{2}{5}$, откуда $FC = \frac{2}{5}OC = \frac{2}{5}\cdot\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{5\sqrt{3}}$;

$DF = DC - FC = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{2a}{5\sqrt{3}} = \frac{11a}{10\sqrt{3}}$.

Искомый угол между плоскостями найдем из ΔDEF: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{EF}{DF}$, где $\alpha = \angle EDF$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2a\sqrt{6}}{15} : \frac{11a}{10\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{6}\cdot 10\sqrt{3}}{15\cdot 11a} = \frac{4\sqrt{2}}{11}$.

Ответ: $\frac{4\sqrt{2}}{11}$.

К таблице 67



7. Так как ΔABC — прямоугольный, то точка O — середина гипотенузы AB.

По условию $\angle CAB = 30°$, $AB = 1$, тогда $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot MO$, где MO — высота пирамиды.

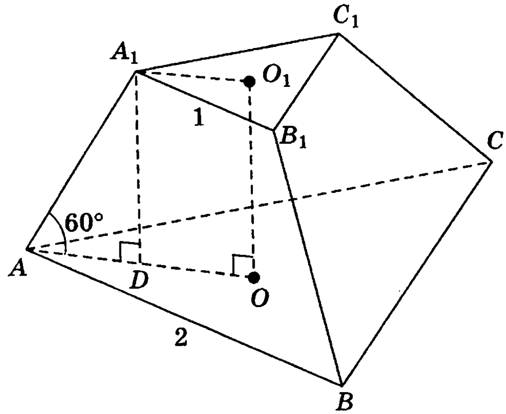
$$S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2}AC \cdot AB \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Так как $\angle MAO = 45^\circ$, то $AO = MO = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}$.

Следовательно, $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{48}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{48}$.

К таблице 68



3. Так как пирамида $ABCA_1B_1C_1$ — правильная, то $AO = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$; $A_1O_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Из вершины A_1 опустим перпендикуляр A_1D на основание ABC.

Тогда $AD = AO - OD = AO - A_1O_1 = = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Из ΔADA_1 $A_1D = AD \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3} = 1$, тогда

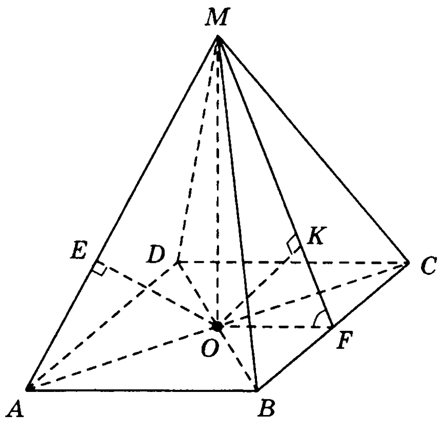
$$V = \frac{H}{3}(S_{\text{н}} + S_{\text{в}} + \sqrt{S_{\text{н}}\cdot S_{\text{в}}}) = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 1^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{7\sqrt{3}}{12}.$$

Ответ: $\frac{7\sqrt{3}}{12}$.

К таблице 69

16. Пусть в правильной пирамиде $MABCD$ $OE = \sqrt{3}$, $OK = \sqrt{2}$, где OE — расстояние от центра основания до боковго ребра AM и OK — расстояние от точки O до боковой грани MBC. $\angle MFO = \alpha$ — двугранный угол при основании пирамиды. Заметим, что $\angle MFO = \angle MOK = \alpha$, $\angle MAO = \angle MOE = \beta$.

Из ΔMKO и ΔOKF соответственно имеем: $MO = \frac{\sqrt{2}}{\cos\alpha}$; $OK = \frac{\sqrt{2}}{\sin\alpha}$. Из ΔMEO и ΔAOE соответственно находим: $MO = \frac{\sqrt{3}}{\cos\beta}$; $AO = \frac{\sqrt{3}}{\sin\beta}$.



Значит, $\frac{\sqrt{2}}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{\cos\beta}$ и $\frac{\sqrt{2}}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sin\beta}$.

Следовательно, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}\cos\beta}{\sqrt{3}}$,

$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\sin\beta}{\sqrt{3}}=\frac{2\sin\beta}{\sqrt{3}}$.

Но $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, тогда

$\frac{(\sqrt{2})^2\cos^2\beta}{(\sqrt{3})^2}+\frac{2\cdot(\sqrt{2})^2\sin^2\beta}{(\sqrt{3})^2}=1$, или

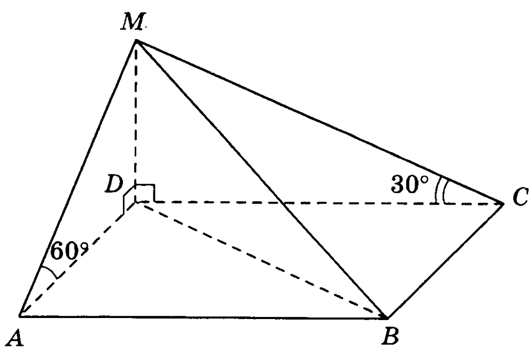
$\frac{2\cos^2\beta}{3}+\frac{4\sin^2\beta}{3}=1$,

$2\cos^2\beta+4(1-\cos^2\beta)=3,\ 2\cos^2\beta=1,\ \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Тогда $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}$, откуда $\alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

К таблице 70



2. Пусть боковые грани MDC и ADM перпендикулярны плоскости $ABCD$. В этом случае MD — высота пирамиды. По условию задачи $ABCD$ — прямоугольник, тогда $MC\perp CB$ и $MA\perp AB$, $\angle MCD=30°$, $\angle MAD=60°$.

Пусть $AD=x$, $DC=y$, тогда из ΔADM $MD=x\operatorname{tg}60°=\sqrt{3}\,x$, а из ΔMDC $MD=y\operatorname{tg}30°=y/\sqrt{3}$.

Сравнивая правые части полученных равенств, получим $\sqrt{3}x=y/\sqrt{3}$, откуда $y=3x$.

Так как объем пирамиды $V=9$, то $V=\frac{1}{3}S_{\text{осн.}}\cdot H$, где $S_{\text{осн.}}=AD\cdot DC=$ $=xy$, $H=MD$, или $\frac{1}{3}xy\cdot H=9$, $xy\cdot H=27$, $y=3x$, $H=\sqrt{3}\,x$, тогда

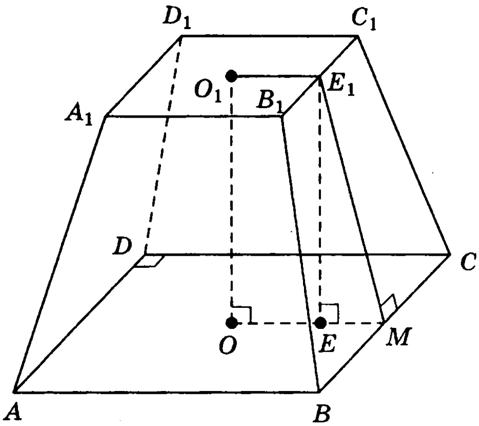
$x\cdot 3x\cdot\sqrt{3}\,x=27$, или $x^3=\frac{9}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}=(\sqrt{3})^3$, откуда $x=\sqrt{3}$, $y=3\sqrt{3}$.

Значит, $S_{осн.} = xy = \sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 9$.

Ответ: 9.

К таблице 71

7. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде $AB = 2$, $A_1B_1 = 1$, $S_{бок} = \frac{1}{2}S_{полн}$.



Но $S_{полн} = S_{бок} + S_н + S_в$, где $S_н$ — площадь нижнего основания, $S_в$ — верхнего. $S_н = AB^2 = 4$, $S_в = A_1B_1^2 = 1$.

Значит, $S_{бок} = \frac{1}{2}(S_{бок} + 5)$, или $2S_{бок} = S_{бок} + 5$, откуда $S_{бок} = 5$.

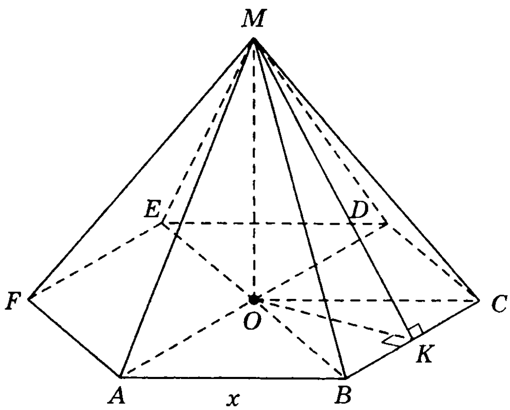
Но $S_{бок} = \frac{1}{2}(P_н + P_в) \cdot h$, где $P_н = 4AB = 8$; $P_в = 4A_1B = 4$, h $= ME_1$ — апофема (высота боковой грани). Получим $\frac{1}{2}(8 + 4) \cdot h = 5$, $6h = 5$, $h = \frac{5}{6}$. Проведем $E_1E \perp OM$. Из ΔE_1EM, где $EM = OM - EO = OM - O_1E_1 = \frac{1}{2}(AB - A_1B_1) = \frac{1}{2}$, найдем $EE_1 = \sqrt{E_1M^2 - EM^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{36}} = \frac{2}{3}$.

Следовательно, $V_{ус.пир.} = \frac{H}{3}(S_н + S_в + \sqrt{S_н \cdot S_в}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}(4 + 1 + \sqrt{4 \cdot 1}) = \frac{14}{9}$.

Ответ: $\frac{14}{9}$.

К таблице 72

5. Пусть $AB = x$ — сторона основания. Так как в основании пирамиды правильный шестиугольник, то $x = R = OC$, где R — радиус описанной окружности.



В ΔOKC $KC = \frac{1}{2}x$, тогда $OK = \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

По условию $S_{бок} = 10 \cdot S_{осн}$.

Но $S_{бок} = \frac{1}{2}P \cdot h$, где $P = 6AB = 6x$, $h = MK$ — апофема боковой грани.

$S_{осн} = 6 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$, тогда

$\frac{1}{2} \cdot 6x \cdot h = 10 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$, $x > 0$, $3h = 15\sqrt{3}x$, откуда $h = MK = 5\sqrt{3}x$.

Из ΔMOK $MO = H = \sqrt{MK^2 - OK^2} = \sqrt{75x^2 - \frac{3}{4}x^2} = \frac{\sqrt{297}}{2}x = \frac{3\sqrt{33}}{2}x$.

По условию задачи объем $V = \frac{9\sqrt{11}}{4}$, или $\frac{1}{3}S_{осн} \cdot H = \frac{9\sqrt{11}}{4}$, или $\frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 \cdot \frac{3\sqrt{33}}{2}x = \frac{9\sqrt{11}}{4}$, или $x^3 = 1$, откуда $x = 1$.

Ответ: 1.

К таблице 73

8. По свойству диагонали прямоугольного параллелепипеда имеем: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, где $d = B_1D_2$, $a = B_1C_1 = A_2D_2 = 1$, $b = AB = 6$, $c = C_2D_2 = 2$, тогда $d^2 = 1^2 + 6^2 + 2^2 = 41$.

Ответ: 41.

§ 11. Фигуры вращения

К таблице 74

11. Так как цилиндр и конус имеют общее основание и высоту, то $V_{кон.} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$. По условию задачи $V_{цил.} = 150$, или $\pi R^2 H = 150$, тогда $V_{кон.} = \frac{1}{3} \cdot 150 = 50$.

Ответ: 50.

К таблице 75

6. Пусть R — радиус основания конуса, H — высота. По условию, образующая $l = 4\sqrt[3]{9/\pi}$, $V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$. Зная угол между образующей конуса и плоскостью основания, имеем:

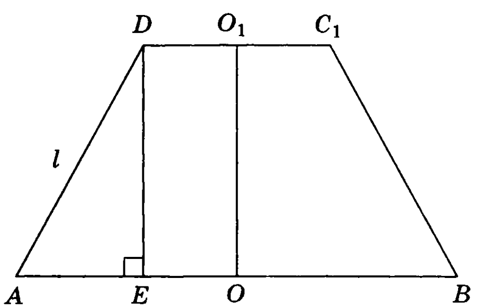
$$H = l \cdot \sin 30^\circ = 4\sqrt[3]{9/\pi} \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt[3]{9/\pi};$$

$$R = l \cdot \cos 30^\circ = 4\sqrt[3]{9/\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9/\pi}.$$

Значит, $V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3}\pi \cdot (2\sqrt{3})^2 \cdot (\sqrt[3]{9/\pi})^2 \cdot 2\sqrt[3]{9/\pi} = \frac{1}{3}\pi \cdot 12 \cdot 2 \cdot \frac{9}{\pi} = 72.$

Ответ: 72.

К таблице 76



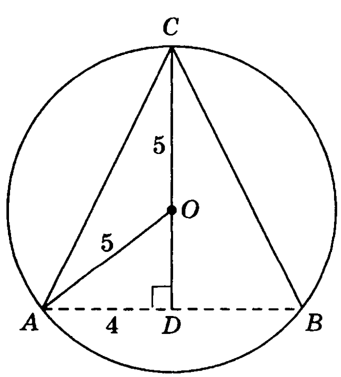
6. Рассмотрим осевое сечение усеченного конуса — равнобедренную трапецию $ABCD$, где $AO = R$, $DO_1 = r$, $OO_1 = DE = H$, соответственно радиусы верхнего и нижнего оснований и высота. По условии задачи $r : R : l = 1 : 4 : 5$, где l — образующая усеченного конуса.

Пусть $r = x$, тогда $R = 4x$, $l = 5x$. Так как $DE = 8$, то из ΔADE $(5x)^2 - (4x - x)^2 = 8^2$, или $16x^2 = 64$; $x = 2$.

Значит, $r = 2$, $R = 8$, $l = 10$, следовательно, $S_{\text{бок.}} = \pi l(R + r) = \pi \cdot 10 \cdot (8 + 2) = 100\pi$.

Ответ: 100π.

К таблице 77

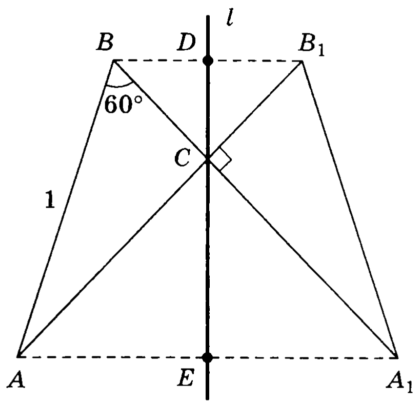


5. Рассмотрим осевое сечение шара и вписанного в него конуса. Пусть $R = 5$ — радиус шара, $r = 4$ — радиус основания конуса. Пусть $CD = H$ — высота конуса. Заметим, что $AO = CO = 5$ — как радиусы шара. Из ΔAOD $OD = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Значит, $CD = CO + OD = 8$.

Ответ: 8.

К таблице 78



3. Рассмотрим осевое сечение тела вращения. Из ΔABC $BC = AB \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$; $AC = AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

По условию l — биссектриса прямого угла BCB_1, значит, $BD = DC = x = \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{AB \cdot \cos 60^\circ}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot 1/2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$;

$$AE = CE = y = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{AB \cdot \sin 60^\circ}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}/2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $V_{\text{т.в.}} = V_{\text{ус.к.}} - V_{BCB_1} - V_{ACA_1} = \frac{1}{3}\pi(x + y)(x^2 + xy + y^2) - \left(\frac{\pi}{3}x^3 + \frac{\pi}{3}y^3\right) = \frac{1}{3}\pi(x + y)(x^2 + xy + y^2) - \frac{\pi}{3}(x + y)(x^2 - xy + y^2) = \frac{2\pi}{3}xy(x + y) = \frac{\pi \cdot 1^3}{6}\sin 120^\circ \cdot \sin 105^\circ$.

Но $\sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$.

Значит, $V_{\text{т.в.}} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1) = \frac{\pi\sqrt{6}}{48}(\sqrt{3} + 1)$.

Ответ: $\frac{\pi\sqrt{6}}{48}(\sqrt{3} + 1)$.

К таблице 79

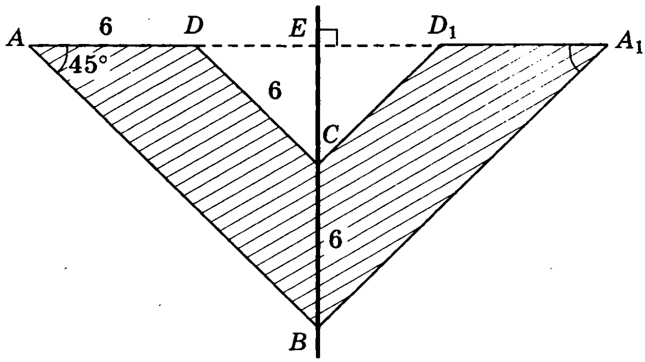
2. Пусть $a = 2\sqrt{7/\pi}$ и $b = 2\sqrt{1/7\pi}$ соответственно длина и ширина прямоугольника. При вращении его вокруг прямой, проходящей через середины бо́льших сторон, получим цилиндрическую поверхность.

Тогда $S_{\text{полн.}} = 2\pi R(R + H)$, где $R = \frac{1}{2}a = \sqrt{7/\pi}$, $H = b = 2\sqrt{1/7\pi}$, значит, $S_{\text{полн.}} = 2\pi \cdot \sqrt{7/\pi}(\sqrt{7/\pi} + 2\sqrt{1/7\pi}) = 2\pi \cdot \frac{7}{\pi} + 4\pi \cdot \frac{1}{\pi} = 14 + 4 = 18.$

Ответ: 18.

К таблице 80

6. Рассмотрим осевое сечение тела вращения, полученного вращением равнобедренной трапеции $ABCD$ с острым углом в 45° вокруг боковой стороны BC, длина которой равна DC. Так как $\angle A = 45°$, то $\angle CDE = 45°$, тогда $DE = CE = r$.



По условию $AD = DC = CB = 6$.

Тогда $V_{\text{т.в.}} = V_{ABA_1} - V_{DCD_1}$; в ΔDEC $DE = CE = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$. $V_{ABA_1} = \frac{1}{3}\pi R^2 H =$

$= \frac{1}{3}\pi(AD + DE)^2 \cdot BE = \frac{1}{3}\pi(6 + 3\sqrt{2})^2 \cdot (6 + 3\sqrt{2}) = \frac{1}{3}\pi \cdot 9(2 + \sqrt{2})^2 \cdot 3(2 + \sqrt{2}) =$

$= 9\pi(2 + \sqrt{2})^3 = 9\pi(8 + 12\sqrt{2} + 12 + 2\sqrt{2}) = 9\pi(20 + 14\sqrt{2}) = 18\pi(10 + 7\sqrt{2})$;

$V_{DCD_1} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot DE^2 \cdot CE = \frac{1}{3}\pi(DE)^3 =$

$= \frac{1}{3}\pi(3\sqrt{2})^3 = \frac{1}{3}\pi \cdot 27 \cdot 2\sqrt{2} = 18\sqrt{2}\pi.$

Значит, $V_{\text{т.в.}} = 18\pi(10 + 7\sqrt{2}) - 18\sqrt{2}\pi =$

$= 18\pi(10 + 7\sqrt{2} - \sqrt{2}) = 18\pi \cdot (10 + 6\sqrt{2}) = 36\pi(5 + 3\sqrt{2}).$

Ответ: $36\pi(5 + 3\sqrt{2})$.

ЛИТЕРАТУРА

Атанасян Л.С. Геометрия: учебник для 10–11 классов общеобразовательных учреждений. — М.: Просвещение, 2011.

Балаян Э.Н. Геометрия: задачи на готовых чертежах. 7–9 классы. — 4-е изд. — Ростов н/Д: Феникс, 2013.

Балаян Э.Н. Репетитор по геометрии для подготовки к ГИА и ЕГЭ. — Ростов н/Д: Феникс, 2012.

Рыбкин Н. Сборник задач по геометрии. Стереометрия для 9 и 10 классов. — М.: Просвещение, 1972.

Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия. Эффективная подготовка к ЕГЭ. — М.: Экзамен, 2008.

СОДЕРЖАНИЕ

Балаян Эдуард Николаевич

ГЕОМЕТРИЯ

Задачи на готовых чертежах для подготовки к ЕГЭ

10–11 классы

Ответственный редактор *С.Осташов*
Технический редактор *Л. Багрянцева*

Сдано в набор 25.05.2012. Подписано в печать 30.09.2012.
Формат 70×100/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 18,06. Тираж 3000 экз.
Заказ № 4301/1

ООО «Феникс»
344082, г. Ростов-на-Дону, пер. Халтуринский, 80

Сайт издательства: **www.phoenixrostov.ru**
Интернет-магазин: **www.phoenixbooks.ru**

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов
в ООО «Кубаньпечать»
350059, г. Краснодар, ул. Уральская, 98/2